

الجزء الأول

في تطبيق الجبر على الهندسة

الباب الاول

تعريفات عامة

بند ١ التحليل الهندسي و تطبيق الجبر على الهندسة هو فرع من العلوم الرياضية الغرض منه استعمال الحسابات في المباحث الهندسية وعليه فحساب المثلثات داخل في ذلك *

بند ٢ هذا الفرع يمكن انقسامه الى جزئين أحدهما يتعلق بحل المسائل المعينة اعني بالبحث عن الاجزاء المجهولة من شكل بواسطة الارتباطات الواقعة بين الاجزاء المعلومة والمجهولة منه والثاني وهو المنسوب للشهير ديكارت يتعلق بالبحث عن معادلات المنحنيات والسطوح ولنذكرهما على اللف والنشر المرتب فنقول

الجزء الاول وهو الذي يتعلق بحل المسائل المعينة

في بيان المقادير الهندسية بالاعداد والقاعدة التي توجد بواسطتها معادلة مسئلة هندسية

بند ٣ يمكن بيان الخطوط والسطوح والاجسام بالاعداد بل و يمكن بيانها لمزيد التعميم بالحروف بان يؤخذ خط مستقيم محدود الطول ويجعل وحدة لها مثلا اذا

جعل ب رمزا لعدد الوحدات الخطية التى يشتمل عليها
ضلع مربع كان ب² كناية عن مساحة هذا المربع واذا جعل
ح و ء رمزين لعدد الوحدات الخطية التى يشتمل عليها
كل من قاعدة مستطيل وارتفاعه كان ح × ء كناية عن
مساحة هذا المستطيل واذا جعلت ح و ب و ء رموزا
للابعاد الثلاثة من متوازى السطوح كان ح × ب × ء
كناية عن حجم هذا الشكل المتوازى السطوح *

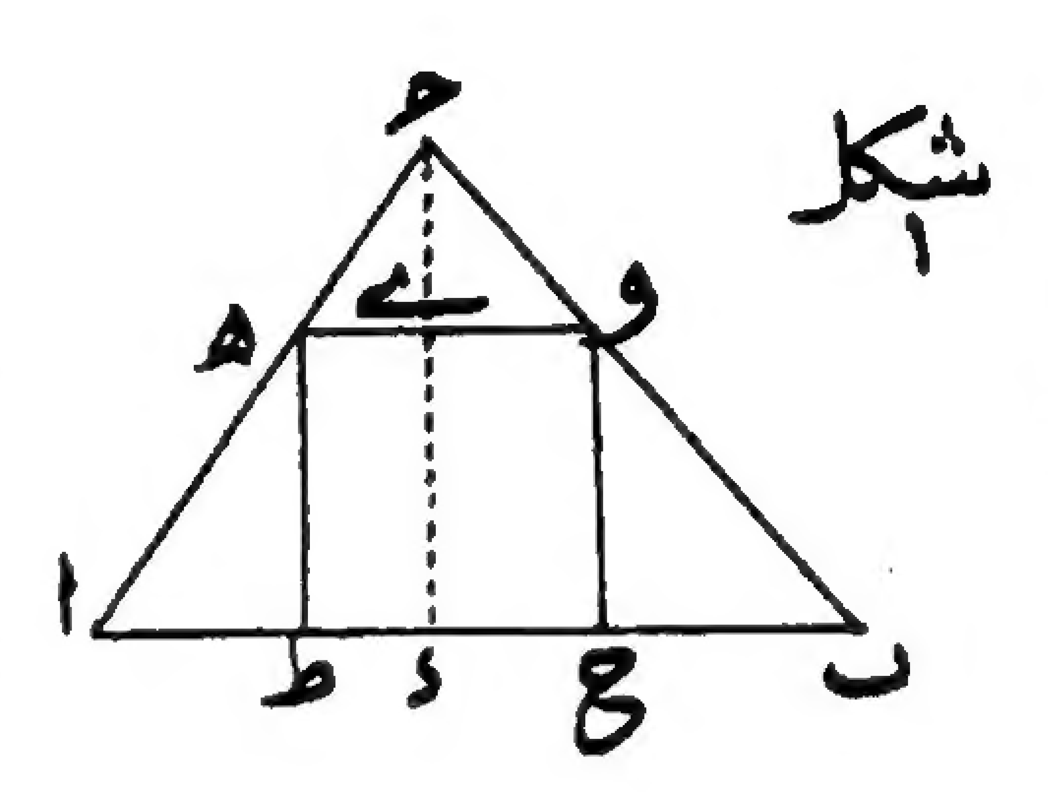
بحث لا بد على العموم فى ايجاد معادلة مسئلة هندسية
من اتباع قاعدة الشهير نوتون وهى انه ينبغى ان تعتبر
المسئلة المفروضة كانها محلولة وان يرسم شكل يكون
دالا على اجزاء هذه المسئلة وشروطها وان ترسم بالاختيار
خطوط اخرى مساعدة لتؤخذ منها بعض نسب معينة ثم
يقارن بين الكميات الداخلة فى الشكل المذكور بدون
ان يلتفت الى المعاليم منها والمجاهيل ثم تنظر النسب الواقعة
بين تلك الكميات وتركب منها معادلات المسئلة *

وبعد ان تركب معادلات المسئلة بهذه المثابة يسهل بواسطة
حل هذه المعادلات تحصيل مقادير الكميات المجهولة ويمكن
حينئذ تقديرها بالاعداد او تعيينها رسميا بالمسطرة
والبيكار بواسطة بعض طرق سيأتى ذكرها *

بحث القاعدة المتقدمة يسهل ايضاحها بهذه المسئلة وهى

المسئلة الاولى

المعلوم مثلث والمراد ايجاد ضلع المربع الذى يمكن رسمه داخله فلحل هذه المسئلة يفرض ان ا ب حـ هو المثلث المعلوم (شكل ١) اى الذى سائر اجزائه معلومة وان المربع المذكور مرسوم داخله وينزل من راس هذا المثلث العمود حـ ء فيكون هو ارتفاعه فاذا اجعل حـ رمزا للقاعدة ا ب من المثلث وه هـ رمزا الارتفاع حـ ء وجعل س رمزا الضلع المربع فانه يحدث



س = ط ح = و هـ = و ح = ى ء وبناء عليه يكون

حـ ى = حـ ء ـ ى ء = هـ ـ س وبملاحظة ان المثلثين ا حـ ب وه حـ وهـ متشابهان وانه يؤخذ منهما

حـ : هـ :: س : هـ ـ س

يتحصل حـ (هـ ـ س) = هـ س

ومن هنا يرى ان س = $\frac{حـ هـ}{حـ + هـ}$

وهى معادلة بواسطتها يمكن حساب المقدار الرقمى للمجهول مثلا اذا كان طول القاعدة حـ يساوى ٥ متر وكان الارتفاع هـ = ٦ متر فانه يتحصل للمجهول مقدار هو

س = $\frac{٣٠}{١١}$ = $\frac{٦}{١١}$ ٢ متر

بحث فاذا اريد تحصيل س بطريقة رسمية فانه يلزم
ان يرسم المقدار س = $\frac{ح \times هـ}{ح + هـ}$ بواسطة المسطرة والبيكار
ولذا ينبغي التنبه في اصول الهندسة الى ان المقدار $\frac{ح \times هـ}{ح + هـ}$
هو الرابع المتناسب مع الخطوط الثلاثة ح + هـ و ح و هـ
وانه يقتضي لتحصيله ان يرسم المستقيمان اب و اح شكل ٢
اللذان يكون
بينهما زاوية
حيثما اتفق
كزاوية باح
وان يوخذ
على المستقيم

اب الذي هو احد ضلعي هذه الزاوية ام = ح + هـ و
م ب = ح وان يؤخذ على الضلع الاخر طول اح = هـ ثم
يوصل بين ح و م بالمستقيم ح م ثم يرسم من النقطة ب
مستقيم ب ع يكون موازيا للمستقيم ح م المذكور فيتحصل
الضلع المطلوب وهو ح ع = س لكنه يلزم للسهولة ان
يؤخذ في العمل
عوضا عن زاوية
حيثما اتفق الزاوية
ح ء ع (شكل ٣

التي يمد احد ضلعيها ء ع ويؤخذ عليه ء م = ح و م ع = هـ

ثم يوصل بين النقطة ح والنقطة ه التى هى راس المثلث بالمستقيم ح ه ويرسم من النقطة م مستقيم م ح يكون موازيا للمستقيم ح ه المذكور فيكون ح ء هو ضلع المربع المطلوب لانه يتحصل بمقتضى هذه الطريقة الرسمية

ء م : ء ح :: ح ء : ء ه أى ه : ه + هـ :: س : هـ

فى قاعدة التجانس وتعيين الكميات الجبرية بطريق الرسم

بند ٧ حل معادلات مسئلة هندسية بواسطة الجبر يؤخذ منه لمجهول المسئلة مقدار رقمى يسهل تقديره اما بالاعداد او بالطريقة الرسمية كما تقدم فى بند ٦ وهذا هو المعروف باستخراج المجهول بالطريقة الرسمية

وسنتكلم على ذلك بعد أن نذكر قانون التجانس ونوضحه

فى التجانس

بند ٨ اذا دلت الحروف اَ و بَ و حَ و ءَ و الخ الداخلة فى المعادلة على خطوط ولم يكن واحد من هذه الخطوط مأخوذا وحدة لها كانت المعادلة متجانسة بالنسبة الى هذه الحروف بمعنى ان جميع حدودها تكون محتوية على عدد واحد من المضاريب

وللبرهنة على هذه القاعدة ينبغى التنبيه على ان خطوط الشكل ليست هى الداخلة فى الحساب انما الذى يدخل فيه

هو نسب هذه الخطوط (شكل ٤) ا ———— ب
مثلا الخط ا ب لا يمكن ح ———— ء
دخوله في الحساب إلا شكل ٤ م ———— ع
بالنسبة الى خط آخر ح ء
يمكن اعتباره وحدة له لكن لما كان لا مانع من كون
الخط ح ء لا يكون محصورا في الخط ا ب مرارا صحيحة
لزم البحث عن مقياس مشترك كالخط م ع بين الخطين
ا ب و ح ء وهذا المقياس المشترك م ع يمكن ان يكون
الخطان المذكوران محتويين عليه مرارا صحيحة أو
تقريبية الا ان هذا التقريب يكون معينا بطريق الاختيار
فاذا فرض ان الخط ا ب احتوى على هذا المقياس المشترك
مرارا صحيحة قدرها ت مثلا وان الخط ح ء احتوى
عليه مرارا صحيحة قدرها هـ فيكون ا ب = ت × م ع
و ح ء = هـ × م ع ويكون $\frac{ا ب}{ح ء} = \frac{ت}{هـ}$ بمعنى
ان النسبة الواقعة بين ا ب و ح ء تكون عين
النسبة الواقعة بين العددين المهملين ت و هـ
وحينئذ فقد ظهر من هنا انه لم يدخل في الحساب غير
نسب $\frac{ت}{هـ}$ و $\frac{ح}{ء}$ و $\frac{م}{ع}$ و الخ لكن حيث انه يؤخذ من
قواعد الحساب ان كل تركيب حادث من هذه النسب
بواسطة عملية ضرب أو قسمة أو تحويل الى ذات مقام
واحد او الخ يوصل الى نتيجة متجانسة تكون سائر حدودها

محتوية على عدد واحد من المضاريب فاذا فرض بمقتضى ذلك
ان الحروف آ و ب و ح و ء و الخ الداخلة في معادلة
دالة فيها بدل الاعداد على خطوط فانه يلزم ان تكون
المعادلة متجانسة لانها ان لم تكن كذلك لزم ان يكون احد
هذه الخطوط وهو ب مثلا وحدة لها وهذه الوحدة
لم تكن غير طول اختياري معلوم وفي هذه الحالة يمكن
رد المضروب ب الى اصله في سائر الحدود التي حذف
منها عند جعل ب = ١ بمعنى انه يلزم ادخال ب وما يوافقه
من القوى في حدود المعادلة لتصير متجانسة

بـ٩ـد اذا تجانست كمية قدرت درجتها بعدد مضاريب
احد حدودها ان كانت صحيحة وطرحت درجة المقام من
درجة البسط ان كانت كسرية وقسمت درجة الكسر على
درجة الجذر ان كانت جذرية ومن هنا يؤخذ انه إذا
كان الكسر المجرد من علامة الجذر دالا على خط زاد كل
من حدود البسط عن حدود المقام بمضروب واحد
واذا كان هذا الكسر داخلا تحت علامة الجذر كانت
درجته عين درجة هذا الجذر فاذاً يلزم ان يكون
الجذر التربيعي محتويا على كمية كسرية ذات درجة ثانية
لتكون درجة هذه الكمية الجذرية مساوية للواحد *
ويطلق على القوانين او الكميات ذات الدرجة الاولى
اسم ذات البعد الواحد ويمكن تعيينها رسميا بمستقيم

وأما الكميات ذات الدرجة الثانية التى يطلق عليها اسم ذات البعدين فانها تعيّن رسمًا بسطح والكميات ذات الابعاد الثلاثة بحجم فاذا كانت الكميات غير متجانسة فانه يمكن جعلها متجانسة بان توضع فيها قوى نو الموافقة لتحصيل ذلك ولكى تكون كميات

$\frac{\text{٣أ}^{٣}+\text{ب جـ}-\text{د}}{\text{ب}^{٢}+\text{جـ}^{٢}-\text{د}}$ و $\frac{(\text{ا}-\text{ب})}{\text{ا}+\text{اب}}$ و $\sqrt{\frac{\text{ا}\pm\text{جـ}}{٢}}$

دالة على خطوط يلزم وضعها هكذا

$\frac{\text{٣أ}^{٣}+\text{ب جـ نو}^{٢}-\text{د نو}^{٣}}{\text{ب}^{٣}+\text{جـ}^{٢}\,\text{نو}-\text{د نو}^{٢}}$ و $\frac{(\text{ا}-\text{ب})\,\text{نو}^{٢}}{\text{نو}^{٢}+\text{اب}}$ و $\sqrt{\left(\frac{\text{نو}^{٢}\pm\text{ب جـ}}{٢}\right)}$

وهى كميات ذات بعد واحد اى خطية

فى بيان الكميات الخطية بطريق الرسم

بند لنبدأ اولا بتعيين س = ا + ب - جـ + د - هـ - ے بطريق الرسم بأن نضع المعادلة بهذه الصورة

س = (ا + ب + د) - (جـ + هـ + ے)

ونأخذ على المستقيم و س (شكل ٥) غير المحدود بواسطة بيكار ابتداء من النقطة و اطوال

وأَ = ا و أَبَ = ب و بَ دَ = د فيكون و دَ = (ا + ب + د)

ثم يؤخذ بالابتداء من تلك النقطة فى الجهة التى اخذت فيها الاطوال المذكورة اطوال

و جَ = جـ و جَ هَ = هـ و هَ ےَ = ے

فيكون وىَ = (حَ + هَ + ىَ)

شكل

حَ هَ ىَ

ءَ ىَ اَ و

وحينئذ يكون

س = و ءَ − و ىَ = ىَ ءَ

بند ١١ وثانيا لتعيين س = حَ بَ / ءَ بطريق الرسم نبحث عن الرابع المتناسب مع الخطوط الثلاثة التي هي ح و ء و ب ولتعيين كمية س = ءح ب / ءهـ توضع هكذا س = ءح / ء × ح ب / هـ ثم نبحث عن رابع متناسب ل = ح ب / هـ فيكون س = ءح × ل / ء وبالبحث عن الرابع المتناسب مع الخطوط الثلاثة ء و ءح و ل يتحصل المجهول س

بند ١٢ ولتعيين الكمية الكسرية الكثيرة الحدود س = (اب ح + ءهـ و − زح ط) / لم التي مقامها حد واحد توضع هكذا س = اب ح / لم + ءهـ و / لم − زح ط / لم

ثم يعين بطريق الرسم كل كسر على حدته وحينئذ يئول الأمر الى تعيين ثلاثة خطوط بطريق الرسم تضم الى بعضها او تطرح من بعضها (كما في بند)

بند ١٣ فاذا كان للكمية الكسرية الكثيرة الحدود التي يراد تعيينها بطريق الرسم مقام كثير الحدود فانه يحول الى مقام ذي حد واحد بجعله مساويا لحد واحد يتحد معه في الدرجة ثم تؤخذ بالاختيار مضاريبه

من

من المضار المعلوم ما عدا المضروب والمجهول ص الذي يتعين بالوجه الآتي مثلا اذا أريد بطريق الرسم تعيين

$$\text{س} = \frac{\text{اب ح} + \text{ء ه و}}{\text{اب} + \text{ح ء}}$$ بجعل $\text{اب} + \text{ح ء} = \text{ا ص}$

واذن يكون $\text{ص} = \frac{\text{اب} + \text{ح ء}}{\text{ا}}$ ----------{١}

و $\text{س} = \frac{\text{اب ح}}{\text{ا ص}} + \frac{\text{ء ه و}}{\text{ا ص}}$ ----------{٢}

وحينئذ يتعين مجهول ص رسميا بواسطة معادلة {١} ومجهول س بواسطة معادلة {٢} فاذا اريد بطريق الرسم تعيين كمية

$$\text{س} = \frac{\text{اب ح}^{2} + \text{ك}^{3}\text{ع} - \text{م}^{3}\text{ط}}{\text{ك}^{2}\text{ى} - \text{ع ل ك} + \text{ح م ء}}$$

فانه يلزم جعل المقام $\text{ك}^{2}\text{ى} - \text{ع ل ك} + \text{ح م ء} = \text{ك}^{2}\text{ص}$ ومن هنا يتحصل

$$\text{ص} = \frac{\text{ك}^{2}\text{ى} - \text{ع ل ك} + \text{ح م ء}}{\text{ك}^{2}} = \text{ى} - \frac{\text{ع ل}}{\text{ك}} + \frac{\text{ح م ء}}{\text{ك}^{2}}$$

وحيث علم ص يحدث

$$\text{س} = \frac{\text{اب ح}^{2}}{\text{ك}^{2}\text{ص}} - \frac{\text{ك}^{3}\text{ع}}{\text{ك}^{2}\text{ص}} + \frac{\text{م}^{3}\text{ط}}{\text{ك}^{2}\text{ص}}$$

بند ١٤ ولنعين الآن الكميات الجذرية بطريق الرسم مبتدئين فيها بالكميات البسيطة جدا

$$\sqrt{\text{ح ب}} \quad \text{و} \quad \sqrt{\text{ح}^{2} + \text{ب}^{2}} \quad \text{و} \quad \sqrt{\text{ح}^{2} - \text{ب}^{2}}$$

المعلومة رسميا بواسطة الهندسة الاصلية فنقول من المعلوم ان الكمية الأولى $\text{س} = \sqrt{\text{ح ب}}$ هي الوسط المتناسب

بين خطي ا و ب

والكمية الثانية $س = \sqrt{ح^٢ + ب^٢}$ هي وتر المثلث القائم الزاوية الذى ح و ب هما ضلعا زاويته القائمة (كما فى المقالة الثالثة من الهندسة الاصلية)

والكمية الثالثة $س = \sqrt{ح^٢ - ب^٢}$ هى احد ضلعى الزاوية القائمة فى المثلث القائم الزاوية الذى وتره هو ح و ب ضلعه الآخر

ويمكن تعيين هذه الكمية الاخيرة رسميا بطريقة اخرى بأن توضع هكذا $س = \sqrt{(ح + ب)(ح - ب)}$

فيكون س هو الوسط المتناسب بين ح + ب و ح - ب

بند ١٥ ولتعيين اى كمية جذرية تربيعية بواسطة الرسم يقال من حيث انها محتوية على درجتين ينبغى جعلها مساوية لحاصل ضرب ح × ص بجعل ح عبارة عن احد الضاريب المعلومة و ص عبارة عن كمية مجهولة تتعين رسميا بمقتضى القضايا المعلومة المتقدمة لكونها دالة على كسر وبهذا تؤول الكمية الجذرية الى هذه الصورة وهى $س = \sqrt{ح ص}$ وهى كمية يسهل تعيينها رسميا بمقتضى الحالة الاولى من (بند ١٤)

فاذا اريد بطريق الرسم تعيين $س = \sqrt{\frac{ا^٢ + ح ء^٢}{ب + ح}}$ مثلا

ينبغي جعل $\frac{ا^٢ + ح ء^٢}{ب + ح} = ا ص$ ومن هنا يؤخذ

$ص = \frac{ن^2}{ب+ج} + \frac{م^2 ء^2}{(ب+ج)^2}$

فاما المجهول ص فانه يتعين رسميا بثوالث متناسبة وروابع متناسبة

وأما المجهول س = $\sqrt{٢ ص}$ فانه يتعين بالوسط المتناسب بين ا و ص

ولتعيين الكمية س = $\sqrt{\frac{ك^2 د}{م}}$

توضع هكذا س = $\frac{ك}{م}\sqrt{م د}$

ثم يعين بطريق الرسم الوسط المتناسب بين م و د.

فيرى أن س = $\frac{ك ل}{م}$ واذن يتحصل س بواسطة الرابع المتناسب

ولتعيين الكمية س = $\sqrt{د}$

توضع هكذا س = $\sqrt{د \times ١}$ وهذه الكمية تتعين بالوسط المتناسب بين د و ١

بند ١٦ وهاك طريقة سهلة في تعيين كمية جذرية بطريقة رسم مثلث قائم الزاوية أي تحويل الكميات الجذرية الى هذه الصورة وهي س = $\sqrt{ا^2 \pm ن^2}$

المثال الاول

اذا اريد بطريق الرسم تعيين س = $\sqrt{ا^2 + ن^2 + ه^2 + ء^2 ... + م^2}$ يجعل ص = $\sqrt{ا^2 + ن^2}$ وهذه الكمية تتعين رسميا بواسطة وتر المثلث القائم الزاوية الذى ا و ب هما ضلعا زاويته القائمة

وحينئذ يكون $س = \sqrt{(صَ^2 + ح^2 + د^2 + \cdots + اخ)}$

وكذا يجعل $صَ = \sqrt{ص^2 + ح^2}$ وهذه الكمية تتعين رسما

ايضا بواسطة وتر مثلث قائم الزاوية

ويكون $س = \sqrt{(صً^2 + د^2 + \cdots + اخ)}$

وهكذا الى ان يتحصل الوتر الاخير وهو س

المثال الثاني

اذا أريد بطريق الرسم تعيين $س = \sqrt{(ا ح - ه و + ز ح)}$

فاما ان يجعل

$(ا ح - ه و + ز ح) = ا ص$ فيكون $ص = ح - \frac{ه و}{ا} + \frac{ز ح}{ا}$

وبناء على ذلك يكون $س = \sqrt{ا ص}$ (بمقتضى بند ١٤) واما ان يجعل

$ا ح = ص^2$ و $ه و = ع^2$ و $ز ح = ق^2$

فيكون $س = \sqrt{ص^2 - ع^2 + ق^2}$ وهي كمية تتعين رسميا

بواسطة المثلثات القائمة الزوايا (كما في الحالة المتقدمة)

المثال الثالث

اذا كان $س = \sqrt{(ا^2 - ه^2 \frac{ح^2 + د^2}{ا ب + ح د})}$ وأريد تعيين هذه الكمية رسما

يجعل $ص^2 = ه^2 \frac{ح^2 + د^2}{ا ب + ح د}$

فيكون $س = \sqrt{ا^2 - ص^2}$

وحيث انه لم يبق حينئذ غير تعيين المجهول ص فيجعل

$ح^2 + د^2 = ع^2$ و $ا ب + ح د = ق^2$ يحدث

$م^{٢} = هـ^{٢} \frac{ع^{٢}}{ق^{٢}}$ او $ص = \frac{هـ ع}{ق}$

و ع و ق هما هنا كنايتان عن وترى مثلثين قائمى الزاوية ب س ل ١٧ فاذا اريد بطريق الرسم تعيين جذر المعادلة ذات الدرجة الثانية $س^{٢} + هـ س = ك$ فانه يلزم جعلها متجانسة لأنه اذا كان هـ و س دالين على خطوط احتاج التجانس الى دخول المضروب ىو ليكون الطرف الثانى دالا على سطح اعنى أن $س^{٢} + هـ س = ك ىو$ ثم يوضع م بدل ك ىو ليكون

$س^{٢} + هـ س = م^{٢}$ وهذه المعادلة التى جذراها هما

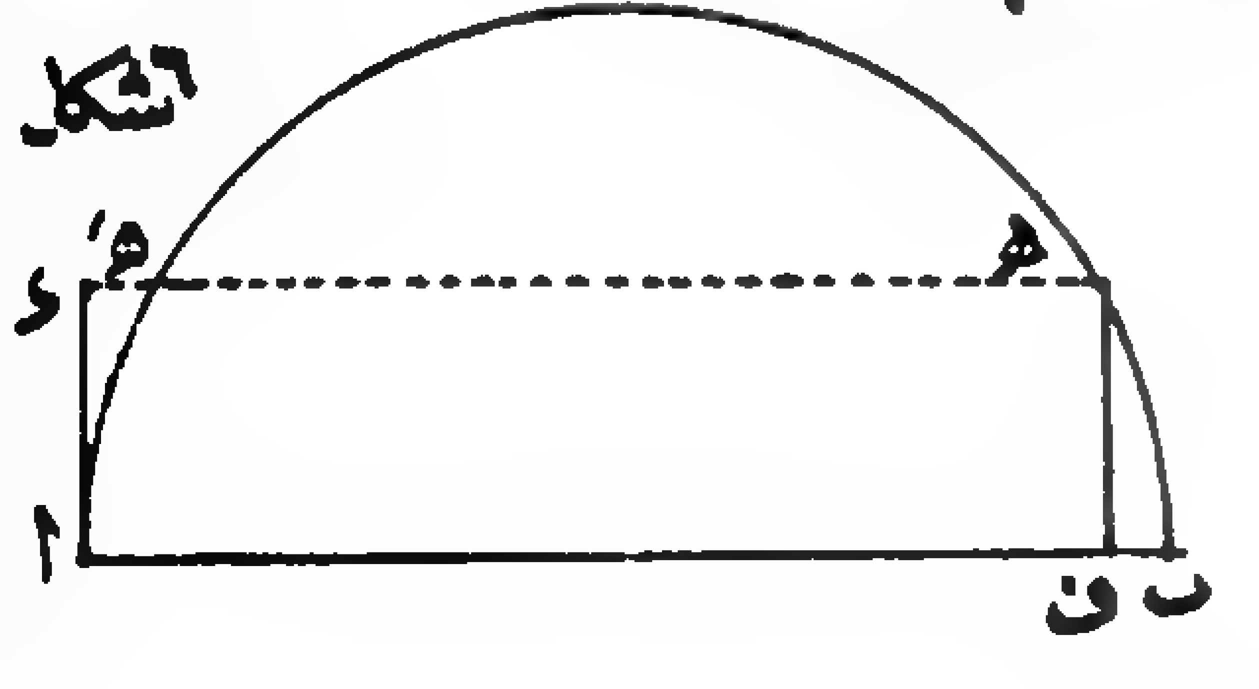
$س = - \frac{هـ}{٢} \pm \sqrt{\frac{هـ^{٢}}{٤} + م^{٢}}$

يمكن تعيينهما رسما بواسطة الطرق السابقة غير أنه يستحسن اجراء العمل بهذه الكيفية وهى أنه

اولا اذا كانت المعادلة ذات الدرجة الثانية بصورة $س^{٢} - هـ س = - م^{٢}$ فانها تحول الى هذه الصورة وهى

$م^{٢} = س (هـ - س)$

وحينئذ يرى فى هذه الصورة أن م هو الوسط المتناسب بين س و هـ - س فاذا اعتبر الخط اب المساوى هـ قطرا (شكل ٦) ورسم عليه نصف المحيط اهـب واقيم على هذا القطر من النقطة ا العمود اء = م



ويرسم من النقطة ء الخط ء هَ ه موازيا للخط ا ب
فان هذا الخط يقطع نصف المحيط فى النقطتين ه و هَ
فاذا انزل العمود ه ف من النقطة ه فان القطعتين
ا ف و ب ف تكونان مقدارين للمجهول س لانه إذا
فرض ان س هو القطعة ا ف فان القطعة الاخرى تكون
ح ـ س = ف ب وحيث أن هَ فَ^{2} = ا ف × ف ب يكون
م^2 = س (ح ـ س) وهذه هى المعادلة المفروضة *

وثانيا اذا كانت المعادلة بهذه الصورة س^2 + ح س = ـ م^2
فانه يقال حيث ان جذرى هذه المعادلة سالبان
فاذا وضع فيها ـ س بدل س آلت الى هذه الصورة وهى
س^2 ـ ح س = ـ م^2 وهى معادلة مشابهة للمعادلة الاولى
وحينئذ يلزم بعد تعيين جذرى هذه المعادلة بطريق
الرسم أن يعطى لهذين الجذرين اشارة الناقص *

وثالثا اذا كانت المعادلة بهذه الصورة س^2 ـ ح س = م^2
أو س (س ـ ح) = م^2 شوهد أن س و س ـ ح هما
خطان فاضلهما ح ومسطحهما هو م^2 ولتحصيله ترسم
دائرة على القطر ا ب المساوى
ح (شكل ٧) ثم يمد من النقطة
ب المماس ب ح = م والقاطع
ح ء ه من النقطة ح والمركز
ع فيكون مقدارا س هما

شكل ٧

ح ء ا ع ب ه

س = حه و س = ـ حه لانه اذا وضع كل من هذين المقدارين في المعادلة س (س ـ ح) = م٢ حدثت هذه المتساوية وهي

حء × حه = ب٢

ورابعا اذا كانت المعادلة بصورة س٢ + ح س = م٢ فان جذريها يكونان كجذري المعادلة س٢ ـ ح س = م٢ الا انهما يختلفان عنهما في الاشارة فيكون مقدارا س هما

س = حء و س = ـ حه

بند ١٨ متى أريد بطريق الرسم تعيين كميات من ذات البعدين فانه يلزم تحويلها الى حاصل ضرب كالحاصل س = ب × ه المركب من مضروبين احدهما هو القاعدة والثاني هو الارتفاع للمستطيل الذي مساحته س مثلا اذا اريد بطريق الرسم تعيين المعادلة س = √(ء (ع٢ ـ و٢)) يجعل ع٢ ـ و٢ = ب٢ و حء = ه٢ فيكون ب و ه كناية عن خطين لا يصعب رسمهما واذن يحصل س = ب × ه وهو مستطيل معلوم

بند ١٩ واذا اريد بطريق الرسم تعيين كمية من ذات الابعاد الثلاثة فانه يلزم تحويلها الى حاصل ضرب مركب من ثلاثة مضاريب هكذا س = ا × ب × ح وهذه المضاريب هي كناية عن الابعاد الثلاثة لمتوازي المستطيلات الذي حجمه س

في المقادير السالبة للجبر

بند ٢٠ من المعلوم انه اذا بحث عن مسئلة عددية بواسطة الجبر وتحصل للمجهول مقداران احدهما موجب والآخر سالب كان لهذه المسئلة حلان فاذا كان منطوق المسئلة لا يؤخذ منه غير حل واحد وهو الموجب فهذا مما يدل على ان هذا المنطوق غير تام وانه يمكن وضع المسئلة بوجه اعم من ذلك ومن المعلوم ايضا انه اذا تغيرت اشارة الحرف الدال على المجهول امكن تحويل منطوق المسئلة الى منطوق آخر يوافق الحلين الموجب والسالب وهذه الملحوظات تستعمل كذلك في حل المسائل الهندسية بالجبر ولنوضح ذلك بهذه المسئلة فنقول

المسئلة الثانية

اذا كان المراد تقسيم مستقيم مفروض الى جزئين بحيث يكون احدهما وسطا متناسبا بين المستقيم الكلي والجزء الآخر يفرض ان المستقيم المذكور هو ح ثم يرمز الى الجزء الاكبر بالرمز س فيكون الجزء الاخر ح − س واذن يتحصل بمقتضى منطوق المسئلة

$\text{ح} : \text{س} :: \text{س} : \text{ح} - \text{س}$ أي $\text{س}^2 = \text{ح} (\text{ح} - \text{س})$ .... (١)

وهاك جذري هذه المعادلة

$\text{س} = -\frac{1}{2}\text{ح} + \sqrt{\text{ح}^2 + \frac{1}{4}\text{ح}^2}$ و $\text{س} = -\frac{1}{2}\text{ح} - \sqrt{\text{ح}^2 + \frac{1}{4}\text{ح}^2}$

اللذين يمكن بالاول منهما وحده حل المسئلة لان الجذر الثاني سالب وهو اكبر من ح ولنبدأ بالاول من هذين الجذرين فنقول اذا أريد بطريق الرسم تعيين هذا الجذر يرسم المستقيم

شكل ٨

اب = م (شكل ٨)
ثم يقام فى نهايته
ب العمود ب ق
= ½ م ويوصل
بين النقطتين
ا و ق بالمستقيم
اق فيحدث اق = $\sqrt{م^2 + \frac{1}{4} م^2}$ ولطرح ½ م من هذا الخط
ينقل ب ق من ق الى ء فيكون الباقى اء هو مقدار س
واذن يكون اء هو الجزء المطلوب من المستقيم اب فيكفى
ان ينقل من ا الى هـ وذلك بأن تعتبر النقطة ا مركزا
ويرسم بنصف القطر اء القوس ء هـ فيقطع اب فى النقطة
هـ واذن يكون المقدار الموجب للمجهول س هو س = اهـ.
وهذه الطريقة الرسمية معلومة فى الهندسة الاصلية

بند ٢١ ولنتصدى الآن للبحث عن المقدار السالب للمجهول
س فى هذه المعادلة

$$س = - \frac{1}{2} م - \sqrt{م^2 + \frac{1}{4} م^2} \ \ldots\ldots (٢)$$

فنقول انه يلزم لذلك أن نغير فى المعادلة (١) المذكورة
اشارة المجهول س فتؤول الى هذه الصورة وهى $س^2 = م(م+س)$
التى يؤخذ منها للمجهول س هذا المقدار وهو
$س = \frac{1}{2} م + \sqrt{م^2 + \frac{1}{4} م^2}$ وهذا المقدار يدل على انه يلزم
بعد تعيين اق = $\sqrt{م^2 + \frac{1}{4} م^2}$ بطريق الرسم ان يضاف اليه

$\frac{1}{2}$ م ولذا ينبغى مد اق الى ان يصل الى النقطة ل من الدائرة المرسومة من المركز ق بنصف القطر ب ق فيحدث

ال = اق + ق ل = $\sqrt{م^2 + \frac{1}{4} م^2} + \frac{1}{2}$ م وحيث ان هذا المقدار ليس الا مقدار (٢) غير انه قد أخذ موجبا فيكون المقدار السالب للمجهول س هو س = − ال فاذا قطع النظر عن اشارة الطول ال وأخذ فى اتجاه مضاد للاتجاه الذى كان يأخذه لو كانت اشارته موجبة فعوضا عن ان يؤخذ على اب بالابتداء من النقطة ا فى الاتجاه اب يؤخذ فى اتجاه مضاد لهذا الاتجاه بالابتداء من النقطة ا الى النقطة ع فيحدث حينئذ مستقيم رابع ع ب يكون هو الحد الرابع من المتناسبة اب : اع :: اع : ع ب وهذا هو الحل الثانى وكلا الحلين يؤخذ من المنطوق الآتى وهو المعلوم النقطتان ا و ب من مستقيم غير محدود والمراد تعيين نقطة ثالثة من هذا المستقيم بحيث يكون بعد هذه النقطة عن النقطة ا وسطا متناسبا بين بعدها عن النقطة الاخرى ب و اب الذى هو البعد بين النقطتين المذكورتين ومن هنا يعلم ان الحل السالب يوصل الى تكميل حل مسئلة ليس السؤال الموجود بها غير حالة خصوصية منها وهذا المقدار المأخوذ بقطع النظر عن اشارته قد اخذ فى جهة مضادة لجهة البعد المطلوب وعلى هذا تنبنى القاعدة الاتية وهى

قاعدة

بند ٢٢ إذا استعمل الجبر في حل المسائل الهندسية وكان للمجهول مقداران احدهما موجب والاخر سالب أخذ المقدار الموجب عن يمين نقطة ثابتة على خط مستقيم او نحن والمقدار السالب عن يسارها وهذه القاعدة هي في الحقيقة قاعدة الشهير ديكارت وسياتي بيانها

المسئلة الثالثة

بند ٢٣ إذا علم كل من النقطتين ا و ب والمستقيم ء ءَ وكان المراد رسم دائرة تمر بهاتين النقطتين وتكون مماسة للمستقيم المذكور (شكل ٩) فانه يكفي لذلك ايجاد نقطة التماس ء بأن يمد ا ب الى ق ويتصف هذا البعد بالنقطة ے ويجعل

شكل ٩

ق ء = س و ق ے = م و ے ب = ح وحيث ان المماس ق ء وسط متناسب بين القاطع ق ب وجزئه الخارج ا ق يحدث

س٢ = ا ق × ق ب = (م + ح) (م − ح) ومن هنا يؤخذ

$س = + \sqrt{م^2 - ح^2}$ و $س = - \sqrt{م^2 - ح^2}$

وحيث انه يوجد للمجهول س مقداران احدهما موجب والآخر سالب فهذا يدل على ان المسئلة لها حلان ولتحصيل الحل المقابل للمقدار الموجب ينبغي تعيين المجهول رسما بواسطة رسم المثلث القائم الزاوية ى هـ ق الذى وتره ى ق وضلعا زاويته القائمة ح و س وكيفية ذلك أن يرسم على ى ق نصف الدائرة ق هـ ى ويؤخذ هـ ى = ا ى فيكون هـ ق هو مقدار س الذى يؤخذ على ى ى من ق الى ى وحينئذ تكون النقطة ى هى نقطة التماس

ولتحصيل الحل الآخر يؤخذ بالابتداء من النقطة ق المقدار السالب للمجهول س الذى يكون حينئذ مبينا بهذه الصورة وهى س = ـ ق ى على ق ىَ فى جهة مضادة للجهة التى قد اخذ فيها المقدار الموجب للمجهول س واذن تكون النقطة ىَ هى نقطة التماس الاخرى

المسئلة الرابعة

اذا كان المراد من نقطة مفروضة هـ رسم وتر كالوتر ب ا ى يكون بين قطعتيه ب ا و ا ى نسبة معلومة كالنسبة $\frac{م}{ن}$ فلحل هذه المسئلة يرسم القطر ش ا ع (شكل ١٠) ويجعل ش ق = نو و ق ا = ع و ا ى = س فيحدث ش ا × ا ع = ب ا × ا ى ومن هنا يؤخذ أن (نو + ع) (نو ـ ع) = ب ا × س أى نو² ـ ع² = ب ا × س

شكل ١٠

لكن حيث انه يؤخذ من منطوق المسئلة أن $\frac{\text{ب ا}}{\text{س}} = \frac{\text{م}}{\text{ن}}$ يكون $\text{ب}^{2} - \text{ح}^{2} = \frac{\text{م س}^{2}}{\text{ن}}$ وبجعل $\text{ب}^{2} - \text{ح}^{2} = \text{ك}^{2}$ (وك هو كناية عن الضلع الثالث من المثلث القائم الزاوية الذى وتره ب) يحدث

$\text{س} = \pm \sqrt{\frac{\text{ك}^{2}\,\text{ن}}{\text{م}}}$ وهذا المقدار يمكن وضعه هكذا $\text{س} = \frac{\text{ك}}{\text{م}} \sqrt{\text{م ن}}$ ويتعين رسما بمقتضى ما سبق فى (ب ١٥ د) ومما يسهل مشاهدته ان هذه المسئلة لها حلان هما ب د و ب َ د َ كما تدل على ذلك الاشارة المضعفة $\pm$ الموضوعة امام مقدار المجهول س

مسائل هندسية تحل بالجبر

المسئلة الخامسة

بند ٢٤ اذا علم مضلع وكان المراد رسم مضلع آخر مشابه له بحيث تكون نسبة مساحتيهما الى بعضهما كنسبة م : ن يجعل لذلك ا كناية عن احد اضلاع المضلع المعلوم و س كناية عن احد اضلاع المضلع المجهول فحيث ان نسبة المساحتين الى بعضهما من جهة كنسبة م : ن ومن اخرى كنسبة $\text{ا}^{2} : \text{س}^{2}$ يحدث $\frac{\text{ا}^{2}}{\text{س}^{2}} = \frac{\text{م}}{\text{ن}}$ ومن هنا يرى ان $\text{س} = \sqrt{\frac{\text{ا}^{2}\,\text{ن}}{\text{م}}}$ وهو مقدار

يسهل تعيينه بمقتضى ما تقرر في (بند ١٥)

المسئلة السادسة

بند ٢٥ اذا كان المراد ايجاد النسبة الخطية بين الشكلين المتشابهين ا ب د ح ه و أ بَ دَ حَ هَ يؤخذ على الزاوية القائمة د ا هـ (شكل ١١) الجزآن ا ب و ا ح المساويان لضلعين متناظرين من الشكلين المفروضين فاذا انزل ا ع عمودا على الخط ب ح انقسم هذا الخط الى القطعتين ب ع و ح ع اللتين نسبتهما الى بعضهما كنسبة الشكلين المذكورين الى بعضهما لان المساحتين لما كانت نسبتهما الى بعضهما كنسبة أبَ² : أحَ² وكان يؤخذ من المثلث القائم الزاوية ا ح ب ان أبَ² : أحَ² :: ب ع : ح ع حدثت هذه المناسبة وهى

مساحة ا ب ح د هـ : مساحة أ بَ حَ دَ هَ :: ب ع : ح ع

المسئلة السابعة

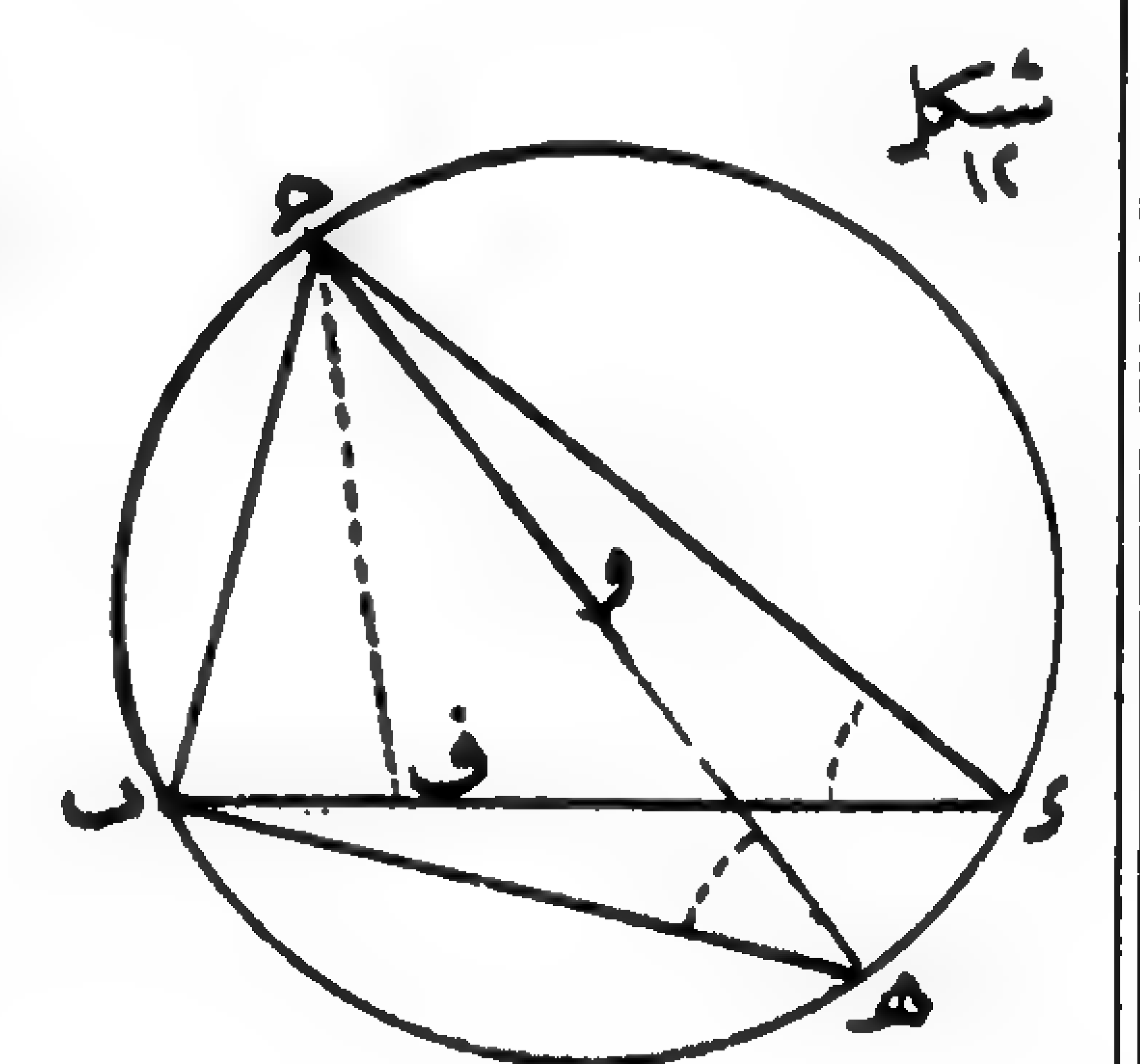
بند ٢٦ اذا كان المراد ايجاد شكل س مشابه لشكل ثان ع ومساو لشكل ثالث ك

يقال حيث ان ع و ك معلومان ينبغي ان يؤخذ ضلع كالضلع ح من الشكل ع ويفرض ان سَ هو الضلع المناظر له من الشكل

المجهول فيكون $\frac{\text{حع}}{\text{س}} = \frac{\text{ح}^2}{\text{سع}}$ ومن هنا يحدث $\frac{\text{ع}}{\text{ك}} = \frac{\text{ح}^2}{\text{سع}}$ حيث ان س = ك وليكن م و ح رمزين لضلعى المربعين المكافئين للشكلين ع و ك او المربعين م^2 و ح^2 المتحدين فى النسبة مع المربعين المذكورين فينتج من ذلك أن $\frac{\text{م}}{\text{ح}} = \frac{\text{ح}}{\text{سَ}}$ ومن هنا يكون $\text{سَ} = \frac{\text{ح}^2}{\text{م}}$ اعنى أن سَ يكون هو الرابع المتناسب مع الخطوط الثلاثة م و ح و ح

المسئلة الثامنة

٢٧ بند اذا كان المراد أولا تعيين نصف قطر الدائرة المرسومة على المثلث ح ب ى بفرض ان المسئلة محلولة ويجعل ب ى = حَ و ح ى = بَ و ح ب = ىَ (كما فى شكل ١٢) ثم يرسم القطر ح هـ وينزل ح ف الذى هو ارتفاع المثلث ثم يوصل بين النقطتين ب و هـ بالمستقيم ب هـ فيكون المثلثان ح ب هـ و ح ف ى متشابهين لأن الزاويتين ح هـ ب و ح ى ب



متساويتان بداعى انهما مرسومتان فى قطعة واحدة واذن تحصل هذه المناسبة وهى

ح هـ : ح ب :: ح ى : ح ف أى ٢ نق : ىَ :: بَ : ح ف وهذه المناسبة يؤخذ منها $\text{نق} = \frac{\text{بَ ىَ}}{\text{٢ ح ف}} = \frac{\text{حَ بَ ىَ}}{\text{٢ حَ × ح ف}} = \frac{\text{حَ بَ ىَ}}{\text{٤ ع}}$

و ع هو كناية عن سطح المثلث الذى اضلاعه الثلاثة هى
ﻫ و ت و ء معلومة فاذا وضع بدل ع المقدار المأخوذ
من القانون (٥٤) المذكور فى (بث١) من حساب المثلثات
حدث نق = ﻫ ت ء / ٤√ك (ك − ﻫ) (ك − ت) (ك − ء)
وثانيا اذا كان المراد تعيين نق الذى هو نصف قطر الدائرة
المرسومة داخل المثلث ﻫ ب ء (شكل ١٣) بوصل مركز هذه
الدائرة مع رؤس المثلث
الثلاثة بالخطوط وﻫ و
وب و وء فينقسم المثلث
المفروض الى ثلاثة مثلثات
اخرى سطوحها هى ½ ﻫ نق
و ½ ت نق و ½ ء نق واذن يكون سطح المثلث ﻫ ب ء
المبين بالرمز ع هو ع = ½ نق (ﻫ + ت + ء) ومن هنا
يرى ان نق = ٢ع / (ﻫ + ت + ء) = ع / ك فاذا وضع بدل ع
مقداره حدث نق = √((ك − ﻫ) (ك − ت) (ك − ء) / ك)

شكل ١٣

المسئلة التاسعة

بث ٢٨ اذا كان المراد تقدير مساحة الشكل احدى ذى الاربعة الاضلاع (شكل ١٤)

شكل ١٤

برسم القطر اه = ب ثم يجعل قاعدة للمثلثين اد ه و ه ا ه
فاذا جعل ف و ف َ رمزين لارتفاعى هذين المثلثين كانت
المساحة المطلوبة مساوية ½ ب (ف + فَ)

المسئلة العاشرة

بند ٢٩ اذا اعلم الضلع اب المساوى ب (شكل ١٥) من
مضلع منتظم مرسوم داخل
دائرة وكان المراد معرفة
الضلع اد = س من مضلع
منتظم هو ضعف المضلع
المفروض فى عدد الاضلاع
فينزل د و عمودا على اب

شكل ١٥

فيحدث آدَ = دحـ × ٢ د و ويجعل ع رمزا للخط وحـ الذى
هو نصف قطر الدائرة المرسومة داخل المضلع المفروض يحدث
دحـ = نو − ع و وحـَ = آوَ − آحـَ واذن يحدث
سَ = ٢ نو (نو − ع) و عَ = نوَ − ¼ بَ
فاذا جعل ب = نو مثلا اعنى يساوى ضلع المسدس فانه
يؤخذ من ذلك ان س = نو $\sqrt{2-\sqrt{3}}$ وهذا هو ضلع
ذى الاثنى عشر ضلعا المرسوم داخل الدائرة واذا جعل
ب = نو $\sqrt{3}$ اعنى يساوى ضلع المثلث المتساوى الاضلاع
المرسوم داخل الدائرة علم من ذلك أن س = نو وهذا هو

ضلع المسدس *

ويمكن ايضا معرفة الضلع هـ ف المساوى ص من مضلع منتظم مرسوم على دائرة اذا علم الضلع ا ب المساوى ب كما فى الشكل ١٥) من مضلع منتظم مرسوم داخل هذه الدائرة ومساوٍ للمضلع المفروض فى عدد الاضلاع لانه يؤخذ من المثلثين او ى و هـ و ء ان

$$\frac{\text{وى}}{\text{وء}} = \frac{\text{اى}}{\text{هـء}} \quad \text{أعنى} \quad \frac{\text{ع}}{\text{نو}} = \frac{\text{ب}}{\text{ص}}$$

واذن يكون $\text{ص} = \frac{\text{ب نو}}{\text{ع}}$ و $\text{ع}^{2} = \text{نو}^{2} - \frac{1}{4}\,\text{ب}^{2}$

وحينئذ اذا جعل $\text{ب} = \text{نو}\sqrt{2}$ = ضلع المربع حدث $\text{ع} = \frac{1}{2}\,\text{نو}\sqrt{2}$ و $\text{ص} = 2\,\text{نو}$ وهذا هو ضلع المربع المرسوم على الدائرة واذا جعل $\text{ب} = \text{نو}\sqrt{3}$ = ضلع المثلث المتساوى الاضلاع حدث $\text{ص} = 2\,\text{نو}\sqrt{3}$ وهذا هو ضلع المثلث المتساوى الاضلاع المرسوم على الدائرة

بند من القوانين المتقدمة يسهل استنتاج ط التى هى اقرب نسبة بين المحيط والقطر او نصف المحيط ط للدائرة التى نصف قطرها يساوى الواحد (راجع الهندسة الاصلية)

ولذا يجعل نو = ١ فى القوانين السابقة فتؤول الى

$\text{س} = \sqrt{(2 - 2\text{ع})}$ و $\text{ع} = \sqrt{(1 - \frac{1}{4}\,\text{ب}^{2})}$ و $\text{ص} = \frac{\text{ب}}{\text{ع}}$

فاذا جعل ب = ١ = ضلع المسدس فانه يحدث $\text{س} = \sqrt{(2 - \sqrt{3})}$ = ٠٫٥١٧٦٣٨ وهذا هو ضلع ذى الاثنى عشر ضلعا المرسوم

داخل الدائرة

واذا جعل ب = ٠٫٥١٧٦٣٨ شوهد أن س = ٣٫١٠٥٨٢٦٢

وهذا هو ضلع المضلع المرسوم داخل الدائرة الذى عدد اضلاعه ٢٤ ضلعا وهلم جرا

وبواسطة اجراء أربع عمليات مشابهة لهذه العملية يرى أن س = ٠٫٠٦٥٤٣٨ مثلا وهذا هو ضلع المضلع المنتظم المرسوم داخل الدائرة الذى عدد اضلاعه ٩٦ ضلعاً فاذا وضع هذا المقدار بدل ب فى كل من مقدارى ع و ص تحصل ضلع المضلع المنتظم المرسوم على الدائرة المشابه للمضلع المذكور فاذا ضرب مقدارا ب و ص فى ٤٨ حدث لنصفى محيطى هذه المضلعين ٣٫١٣٩١ و ٣٫١٤١٠ وحيث ان نصف المحيط ط محصور بين هذين الطولين يحدث س = ٣٫١٤ وذلك بأخذ المشترك من الاعشار فقط

ولتحصيل اعظم تقريب يقال حيث ان محيط الدائرة يكون اعظم قربا من محيطى الشكلين المنتظمين كلما كثرت اضلاعهما ينبغى بواسطة الطريقة المتقدمة استعمال المضلعات التى يكثر عدد اضلاعها

فاذا فرض مثلا انه قد حسب الضلع ب من المضلع المرسوم داخل الدائرة الذى عدد اضلاعه ن تحصل لنصف محيط هذا المضلع و المضلع المرسوم على الدائرة المشابه له هذان المقداران وهما ½ ب×ن و $\frac{\frac{1}{2}\text{ب}\times\text{ن}}{\sqrt{(1+\frac{1}{2}\text{ب})(1-\frac{1}{2}\text{ب})}}$

وباخذ المشترك من الاعشار دون غيره يحصل مقدار قريب
جدا من نصف المحيط ط انتهى الجزء الاول المتعلق بحل المسائل العددية

الجزء الثاني

في المنحنيات والخطوط المستقيمة

ملحوظات تتعلق بوضع نقطة على خط معلوم

بند ١٢ اذا علم خط مستقيم او منحن غير محدود الطول هو ونقطة من نقطه كالنقطة و مثلا فلتعيين نقطة كالنقطة م على هذا الخط أمران هما أولا بعد النقطة م عن النقطة و المقيس على الخط المعلوم * وثانيا الجهة التي يؤخذ فيها هذا البعد بالابتداء من النقطة و لتحصيل النقطة م

بند ٢٢ اذا علم على خط معلوم وضع كل من النقطتين مَ و مً بالنسبة للنقطة و وكان المطلوب تعيين وضع مَ بالنسبة الى مً فلذلك يلزم اولا معرفة بعد مَ عن مً وثانيا جهة هذا البعد بالابتداء من النقطة مَ

وينبغي التنبيه في مبدا الامر على انه يوجد جهتان لقطع الخط المعلوم احداهما هي انه يبتدئ في سيره من الشمال الى اليمين والاخرى من اليمين الى الشمال

وليكن سَ و سً رمزين للبعدين ومَ و ومً المفروضين

فى الجهة اليمنى للنقطة و (شكل ١٦) فيكون سً ـ سَ هو البعد المطلوب فان كان هذا البعد موجبا كانت النقطة مً موجودة على يمين النقطة مَ وان كان سالبا كانت النقطة مً

شكل ١٦

المذكورة موجودة على شمال مَ وعلى ذلك اذا جعل س رمزا للبعد المطلوب حدث هذا القانون وهو س = سً ـ سَ ... (١) الذى يوصل الى حل المسئلة ان اتفقوا على ان الفاضل سً ـ سَ ان كان موجبا اى مسبوقا باشارة + أخذ البعد س على يمين النقطة مَ وان كان سالبا اى مسبوقا باشارة ـ أخذ البعد المذكور على شمال النقطة مَ المذكورة

ولنفرض الآن أن مَ و مً موجودتان فى جهتين متضادتين بان تكون النقطة مً مثلا موجودة على بعد ٥ مِتر عن يمين النقطة و والنقطة مَ موجودة على بعد ٣ مِتر عن شمال النقطة و المذكورة فتكون النقطة مً موجودة على بعد ٨ مِتر عن يمين النقطة مَ وهذه الحالة تؤخذ ايضا من القانون (١) متى وضعت اشارة ـ امام المقدار المخصوص للبعد سَ الذى يلزم اخذه على شمال النقطة و ولذا يوضع فى القانون المذكور سً = ٥ مِتر و سَ = ـ ٣ مِتر فتكون س = ٨ مِتر فاذا كانت النقطة مً موجودة على بعد ٥ مِتر عن شمال النقطة و والنقطة مَ موجودة على بعد ٣ مِتر عن يمينها فان النقطة مً

تكون على بعد ٨ رمتر عن شمال النقطة م َ ويكون القانون
س = سً - سَ موافقا لهذا الناتج متى جعل فيه سً = - ٥ رمتر
و سَ = ٣ رمتر ومن هنا يكون س = - ٨ رمتر واذا كانت
النقطتان مَ و مً موجودتين معا في الجهة اليسرى للنقطة
و فالحالتان اللتان يمكن حصولهما عند ذلك لا يخرجان
عن القانون (١) الذى يلزم فيه وضع المقادير المخصوصة
للبعدين سً و سَ باشارة - مثلا اذا كان سً = - ٣ رمتر
و سَ = - ٥ رمتر كان س = - ٣ رمتر + ٥ رمتر = ٢ رمتر
واذا كان سً = - ٥ رمتر و سَ = - ٣ رمتر كان س = - ٥ رمتر
+ ٣ رمتر = - ٢ رمتر

وعلى ذلك فالحالات التى يمكن وقوعها فى المسئلة المفروضة
تحل بقانون واحد وذلك بواسطة تغيير الاشارات المقابلة
لتغيير جهات الابعاد الثلاثة سً و سَ و س

بند ٣٢ وعلى العموم اذا كان بعد نقطة عن اخرى قابلا
لان يؤخذ فى جهتين متضادتين بحسب الاحوال المختلفة التى
لا مانع من وقوعها فى مسئلة واحدة كفى وضع معادلات
المسئلة فى فرض احد الجهتين وتكون القوانين او المعادلات
المتحصلة موافقة لجميع الأحوال الممكنة الوقوع بشرط أن
توضع امام المقادير الماخوذة أو البعد المطلوب اشارة
+ أو اشارة - بحسب أخذ هذه المقادير فى الجهة التى
جعلت موجبة أو فى الجهة المضادة لها *

وهذه القاعدة المفيدة هي قاعدة الشهير ديكارت

بند ٣٤ اذا تعينت اوضاع نقطة واحدة أو عدة نقط على مستقيم محدود بأبعاد هذه النقط عن نقطة أخرى معتبرة كنقطة اصل لسائر هذه الأبعاد لزم تخصيص الموجب من الجهتين اللتين يمكن فيهما قطع هذا المستقيم ويطلق على كل من هذه الابعاد بحسب الجهة التي أخذت فيها بالابتداء من نقطة الاصل اسم البعد الاحداثي للنقطة التي ينسب هو اليها وعلى ذلك فالبعد الاحداثي للنقطة هو كمية جبرية مركبة من طول واشارة فان كانت هذه الكمية مبينة بالرمز س كان هذا الحرف عبارة عن الطول والاشارة *

تعيين وضع نقطة على مستو باحداثييها الموازيين لمحورين متقاطعين

بند ٣٥ الطريقة المستعملة غالبا في تعيين وضع نقطة كالنقطة م على مستو هي ان يفرض في هذا المستوى أن المستقيمين ح حَ و ك كَ معلومان (شكل ١٧) ومتقاطعان ثم تعين الجهة الموجبة على كل منهما وهذان المستقيمان هما اللذان يطلق عليهما اسم المحورين الاحداثيين ويطلق على جزءيهما وس و وص الممتدين في الجهة الموجبة بالابتداء من نقطة تقاطعهما

شكل ١٧

و اسم الجزئين الموجبين من المحورين اذا تقرر هذا يرسم من النقطة م بالتوازى للمحورين المستقيمان م ح و م ك فيتقاطعان معهما فى النقطتين ح و ك وحينئذ يكون فى تعيين وضع النقطة م ان يعين كل من وضعى النقطتين ح و ك وهذا لا يتأتى الا بواسطة معرفة كل من طول البعدين و ح و و ك واشارتيهما وهاتان الكميتان هما اللتان يطلق عليهما اسم احداثيى النقطة م المبينين على العموم بالرمزين س و ص اعنى بالحرفين اللذين يكونان موضوعين على الشكل فى نهاية الجزء الموجب من كل محور

واذن يحصل للنقطة م الموضوعة فى الزاوية س و ص الحادثة من الوضعين الموجبين للمحورين

س = + طول و ح و ص = + طول و ك

ويحصل للنقطة مَ الموضوعة فى الزاوية حَ و ص الحادثة من الجزء السالب للمحور و س والجزء الموجب للمحور و ص

س = - طول و حَ و ص = + طول و ك

ويحصل للنقطة مً

س = - طول و حَ و ص = - طول و كَ

ويحصل للنقطة مٌّ

س = + طول و ح و ص = - طول و كَ

وللاختصار فى اللفظ يطلق على المحور و س اسم محور س وعلى المحور و ص اسم محور ص ونقطة تقاطعهما و هى

المعروفة باصل الاحداثيات وقد تكون الاحداثيات قائمة أو مائلة بحسب ما تكون زاوية المحورين قائمة أو غير قائمة

بند ٦٦ اذا علم احداثيا س و ص لنقطة كالنقطة م بالنسبة لمحورين معلومين تعينت هذه النقطة بواحدة من طريقتين احدهما انه يمكن على المحورين اخذ طولى الاحداثيين وح و وك كليهما فى الجهة المعدة له باشارته ثم يرسم من النقطتين ح و ك بالتوازى للمحورين مستقيمان يتركب منهما مع المحورين شكل متوازى الاضلاع ويكونان متقاطعين فى النقطة م

والثانية انه يمكن على احد المحورين اخذ احد الاحداثيين المنسوب هو له اعنى انه يمكن اخذ وح س = مثلا على المحور وس ثم يرسم من النقطة ح المتحصلة بهذه المثابة المستقيم ح م موازيا للمحور الثانى ومساويا للاحداثى الآخر ومتجها فى جهة وص أو فى الجهة المضادة لها بحسب اشارة + أو − التى تكون لهذا الاحداثى وفى هذه الحالة يطلق على الاول من هذين الاحداثيين اسم الاحداثى الافقى وعلى الآخر اسم الاحداثى الرأسى

بند ٦٧ فاذا كان المحوران قائمين فان النقطتين ح و ك يكونان هما المسقطين العمادين او المسقطين الاصليين للنقطة م على هذين المحورين واذا كانا غير قائمين

أو

او مكونين بينهما زاوية حيثما اتفق اطلق على النقطتين
ح و ك اسم المسقطين الاحداثيين للنقطة م على المحورين

بند ٣٨ المساقط الاحداثية لجميع نقط جزء المستقيم
و م توجد بين النقطتين و و ح على محور س وبين النقطتين
و و ك على محور ص ولذا يطلق في بعض الاحيان على البعدين
و ح و و ك اسم المسقطين الاحداثيين للمستقيم و م على
المحورين

بند ٣٩ وبالجملة فالكميتان س و ص المستعملتان
في تعيين وضع نقطة كالنقطة م على مستو بالنسبة لمحورين
يمكن اعتبارهما باربعة أوجه وذلك لكونهما يدلان دلالة
جبرية
أولا على بعدى نقطة الاصل و عن المسقطين الاحداثيين
ح و ك للنقطة م
وثانيا على بعدى المسقطين ك و ح عن النقطة م
وثالثا على المسقطين الاحداثيين للمستقيم و م على المحورين
ورابعا على الضلعين المتجاورين من متوازى الاضلاع الذى
وتره هو المستقيم و م الخارج من نقطة الاصل

بند ٤٠ اذا كان المحوران و س و و ص قائمين كان
البعدان الاحداثيان س و ص للنقطة م مساويين لبعدى
هذه النقطة عن المحورين ويكون بينهما وبين البعد و م المبين
بالرمز ل هذا الارتباط $س^2 + ص^2 = ل^2$

الذى يؤخذ من كل من المثلثين وم ح و وم ك القائمى الزاوية

تعيين وضع نقطة فى الفراغ بواسطة ثلاثة احداثيات موازية لثلاثة محاور متقاطعة

بند ٤١ وضع نقطة كالنقطة م فى الفراغ يتعين بطريقة مماثلة للطريقة المتقدمة وذلك بفرض معرفة الخطوط الثلاثة وس و وص و وع غير المحدودة التى تكون متقاطعة فى نقطة واحدة كالنقطة و وغير موجودة فى مستو واحد فاما هذه المستقيمات فانها تعرف بالمحاور الاحداثية وأما المستويات الثلاثة المارة بهذه المحاور المأخوذة مثنى فانها تسمى بالمستويات الاحداثية فاذا توهمنا من النقطة م بالتوازى للمستويات الاحداثية رسم ثلاثة مستويات متقاطعة مع المحاور فى النقط الثلاث ح و ك و ر شكل ١٨) فانه يشاهد من ذلك انه يكفى فى تعيين وضع النقطة م تعيين وضع النقط الثلاث ح و ك و ر وذلك لا يتأتى الا بعد معرفة طول كل من الأبعاد وح و وك و ور واشارته وهذه

شكل ١٨

الكميات الثلاث الجبرية تسمى باحداثيات النقطة م بالنسبة

للمحاور الثلاثة وهي مبنية على العموم بالرموز التي تكتب على الشكل في نهاية الجزء الموجب من كل محور وهذه الرموز هي في الغالب س و ص و غ ويطلق على المحاور المذكورة اسم محاور س و ص و غ

٤٢ اذا اعلم كل من طول واشارة (اعني جهة) الاحداثيات الثلاثة للنقطة م بالنسبة لثلاثة محاور معلومة امكن تعيين وضع هذه النقطة بكيفيتين

احداهما هي ان مقادير س و ص و غ تتعين بها النقط الثلاث ح و ك و ر فاذا رسمت ثلاثة مستويات موازية للمستويات الاحداثية الثلاثة تعينت بها نقطة واحدة هي النقطة م

والثانية هي انه اذا اعتبرت الاضلاع الاثني عشر المركبة للمتوازي السطوح وم الحادث من المستويات الثلاثة الاحداثية والمستويات الثلاثة الموازية لها ستوهد اننا اذا ابتدأنا في السير من النقطة و لاجل الوصول الى النقطة م واتبعنا ثلاثة اضلاع متوالية من هذا الشكل المتوازي السطوح تيسر لنا الوصول الى النقطة م المذكورة من ست طرق مختلفة غير انها متساوية في الطول ومركبة من ثلاث طرق مستقيمة موازية بالتناظر للمحاور الثلاثة ومتحدة في الجهات والاطوال مع الاحداثيات الثلاثة وهذه الطرق الست هي (راجع شكل ١٨)

وحرم و وحسم و وكحم و وكسام و وردم و ورام

ولا يستعمل من هذه الطرق كلها فى العادة غير الطريقة الأولى المركبة من س وص وغ وعلى ذلك تحصل النقطة م (شكل ١٩) بواسطة اخذ الاحداثى س من و الى ح ثم ص من ح الى ه ثم غ من ه الى م وحينئذ

شكل ١٩

غ ص م ه و ح خ س ه م

يطلق على الأول من هذه الاحداثيات اسم الاحداثى الافقى س وعلى الثانى اسم الاحداثى الراسى ص فى مستوى س ص وعلى الثالث اسم الاحداثى الراسى غ فى الفراغ ففى هذا الشكل الاحداثيات س وص وغ للنقطة م كلها موجبة والاحداثى الافقى س للنقطة مَ موجب وأما احداثياتها الاخران فانهما سالبان

بند ٤٣ ويطلق على النقطة ه التى هى نقطة تقاطع المستقيم م ه الموازى لمحور غ مع المستوى س ص اسم مسقط النقطة م على المستوى س ص بالتوازى للمحور الاحداثى وغ وهذه النقطة ه تتعين بالاحداثيين س وص للنقطة م بقطع النظر عن الاحداثى الراسى الثالث غ وكذلك النقطتان

او و ب (شكل ١٨) هما المسقطان المشابهان للمسقط المذكور
على المستويين الاحداثيين الاخرين وكل منهما يتعين بواسطة
اثنين من احداثيات م بقطع النظر عن الاحداثى الموازى للثالث
فاذا كان المحور وغ قائما على المستوى س وص فان النقطة
ه تكون هى المسقط العمادى للنقطة م على هذا المستوى ويكون
الخط المسقط م ه عمودا على هذا المستوى والمسقط ه يسمى
فى غير هذه الحالة مسقطا مائلا ويكون متعلقا باتجاه
المحور وغ

بند ٤٤ ويطلق على النقطة ح المعينة الوضع بالاحداثى
الافقى س الذى يتلاقى فيه المستوى المرسوم من النقطة م
موازيا للمستوى ص وغ مع المحور وس اسم مسقط النقطة
م على محور س بالتوازى للمستوى الاحداثى ص وغ ويطلق
ايضا على النقطتين ك و ر المعينتين بالاحداثيين ص و غ
اسم مسقطى النقطة المذكورة على المحورين الآخرين *
واذا كان المستوى ص وغ عمودا على المحور وس فان النقطة
ح تكون هى المسقط العمادى للنقطة م على هذا المحور ويكون
الخط المسقط م ح عمودا على المحور المذكور فان لم يتوفر هذا
الشرط فان المسقط ح يقال له مسقط مائل ويكون متعلقا
باتجاه ص وغ

بند ٤٥ المستقيمات وه و ه و ب و ه و ا هى المساقط الاحداثية
للمستقيم وم على المستويات الاحداثية وكل من هذه المساقط

يتعين تعيينا تاما بواسطة اثنين من احداثيات النقطة م
والابعاد وع وه وك وه ور المبينة بالرموز س وه ص
وه غ هي المساقط الاحداثية للمستقيم وم على المحاور الاحداثية

بند ٤٦ وحينئذ يمكن اعتبار الاحداثيات س وه ص وه غ
للنقطة م
اولا كابعاد نقطة الاصل وعن المساقط الاحداثية ع وه
ك وه ر للنقطة م على المحاور
وثانيا كابعاد المساقط الاحداثية ا وه ب وه د عن
النقطة م
وثالثا كالمساقط الاحداثية للمستقيم وم على المحاور الثلاثة
ورابعا كالاضلاع المتجاورة من متوازى سطوح قطره وم

بند ٤٧ اذا كانت المحاور الاحداثية وس وه وص وه وغ
عمادية كانت الاحداثيات س وه ص وه غ للنقطة م مساوية
لابعاد هذه النقطة عن المستويات الاحداثية الثلاثة *
فاذا جعل في هذه الحالة وم = ل فانه يحدث

ل٢ = غ٢ + وحَ٢ وه وحَ٢ = س٢ + ص٢

ومن هنا يوخذ ل٢ = س٢ + ص٢ + غ٢

تعيين مسقط مستقيم محدود ومضلع على محاور احداثية

بند ٤٨ اذا كانت نقطتان كالنقطتين مَ وه مً مسقطتين
في النقطتين حَ وه حً على المحور وس اطلق على البعد حَ حً

المأخوذ

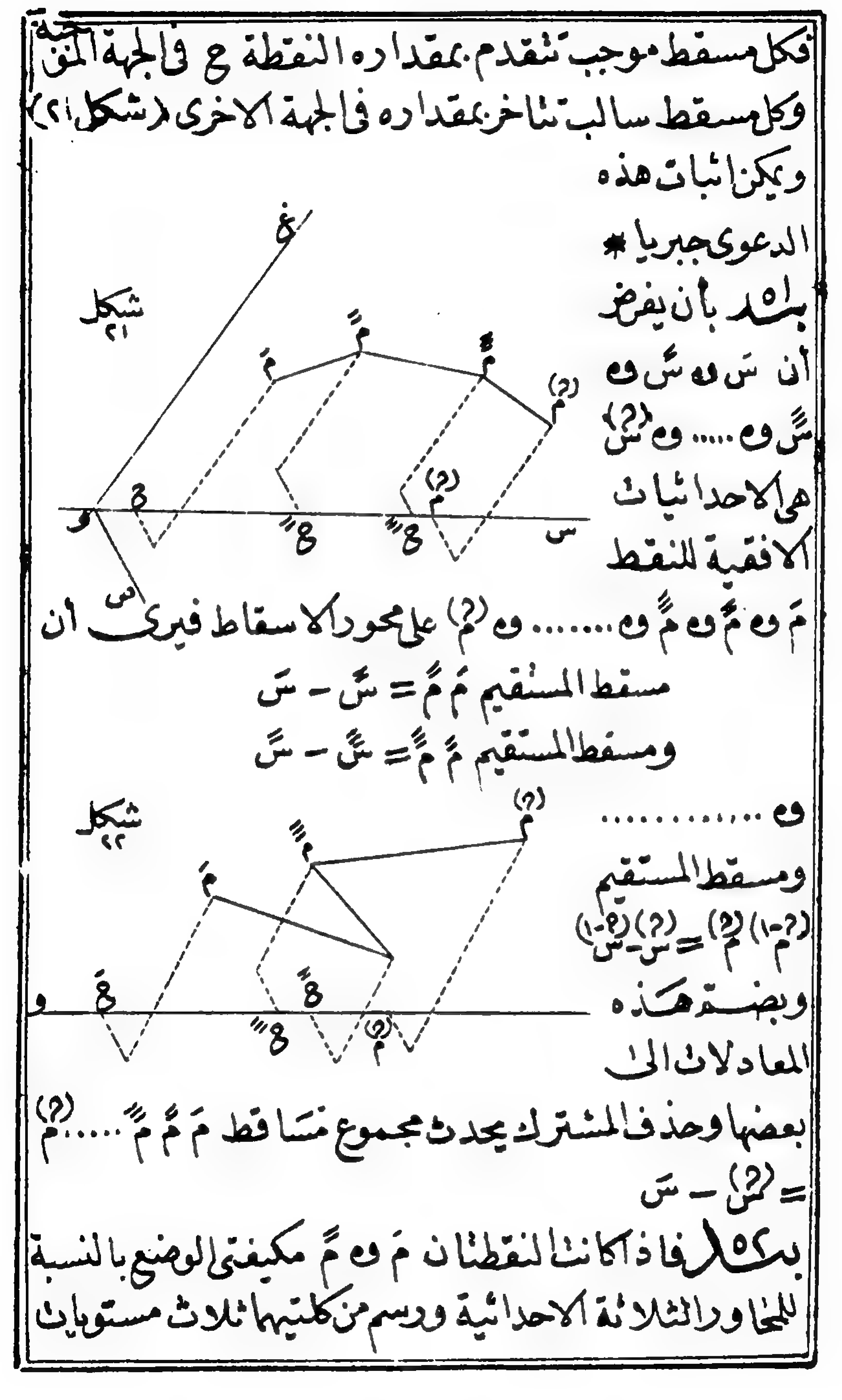
المأخوذ بالاشارة الموافقة للجهة التى يكون مبدأ التسيرفيها من حَ الى حً اسم مسقط المستقيم مَ مً وبترتيب قراءة النقطتين المتطرفتين مَ و مً ومسقطيهما حَ و حً تتعين جهة المسقط حَ حً ومن هنا تعلم الاشارة التى يأخذها هذا المسقط فى القوانين الداخل هو بها وعلى ذلك يكون مسقط مستقيم مَ مً (شكل ٢٠) يساوى زائد الطول حَ حً ويكون مسقط المستقيم مً مَ يساوى - الطول حً حَ *

بند ٤٩ يؤخذ مما سبق ان مسقط المستقيم مَ مً الذى لطرفيه مَ و مً الاحداثيان الافقيان سَ و سً على محور الاسقاط يكون مساويا سً - سَ

دعوى نظرية

بند ٥٠ مهما كان وس الذى هو محور الاسقاط والمستوى الاحداثى ص وغ فان المجموع الجبرى لمساقط اضلاع طريق كثيرة الاضلاع كالطريق مَ مً مًّ و ..... م(ن) الموصلة من النقطة مَ الى النقطة م(ن) يكون مساويا لمسقط الطريق المستقيمة مَ م(ن)

وعلى ذلك فهذا الأمر بديهى اذا كانت المساقط الجزئية حَ حً و حً حًّ والخ متحدة الجهة والاشارة وأما اذا لم تكن متحدة الجهة



فكل مسقط موجب تتقدم بمقداره النقطة ج فى الجهة المتوجهة

وكل مسقط سالب تتأخر بمقداره فى الجهة الاخرى (شكل ٢١)

ويمكن اثبات هذه الدعوى جبريا *

بند ٥١ بان يفرض ان سَ و سً و سٌ و ..... و س^(ن) هى الاحداثيات الافقية للنقط مَ و مً و مٌ و ...... و م^(ن) على محور الاسقاط فيرى ان

مسقط المستقيم مَ مً = سً − سَ

ومسقط المستقيم مً مٌ = سٌ − سً

و ....

ومسقط المستقيم م^(ن-١) م^(ن) = س^(ن) − س^(ن-١)

وبضم هذه المعادلات الى بعضها وحذف المشترك يحدث مجموع مساقط مَ مً مٌ ...... م^(ن) = س^(ن) − سَ

بند ٥٢ فاذا كانت النقطتان مَ و مً مكيفتى الوضع بالنسبة للمحاور الثلاثة الاحداثية ورسم من كلتيهما ثلاث مستويات

موازية للمستويات الثلاثة الاحداثية فانه يتكون من ذلك متوازى سطوح يكون المستقيم مَ مً قطراله وتكون اضلاعه الثلاث المتجاورة الخارجة من الراس مَ مساوية وموازية ومتحدة فى الجهة مع مساقط المستقيم مَ مً وهى سً - سَ وصً - صَ وعً - عَ على المحاور الاحداثية

فاذا اخذت على المحاور الثلاثة بالابتداء من نقطة الاصل و أبعاد مساوية لهذه المساقط كل واحد منها موافق لاشارته وكمل رسم متوازى السطوح الذى تكون هذه الابعاد كناية عن ثلاثة اضلاع متجاورة من اضلاعه كان الشكل المتوازى السطوح الثانى هذا مساويا للمتوازى السطوح الاول ويكون قطره الخارج من نقطة الاصل وَ موازيا للمستقيم مَ مً المتحد معه فى الجهة والطول

وفى الحالة الخصوصية التى يكون فيها أحد المساقط معدوما تكون النقطتان مَ ومً موجودتين فى مستو واحد مواز لاحد المستويات الاحداثية وحينئذ يؤول الشكلان المتوازيا السطوح الى شكلين متوازيى الاضلاع واذا كان مسقطان معدومين فان النقطتين المذكورتين تكونان موجودتين على خط مستقيم مواز لاحد المحاور ويكون البعد مَ مً مساويا المسقط على المحور المذكور *

بند ٤٦ فاذا كانت المحاور الثلاثة قائمة وجعل ل رمزا للبعد مَ مً فانه يتحصل بملاحظة البند السابق مع (بند ٤٧)

ل٢ = (سً - سَ)٢ + (صً - صَ)٢ + (عً - عَ)٢

فان كانت النقطتان المذكورتان موجودتين فى مستوى س ص أو فى مستو موازٍ له فان هذا القانون يؤل الى

ل٢ = (سً - سَ)٢ + (صً - صَ)٢

فى المقادير الجبرية للمساقط القائمة المنسوبة لخط مستقيم أو لمضلع على محور

بند ٥٤ ليفرض ان وس و وص هما محوران احداثيان قائمان وأن مَ و مً هما نقطتان موجودتان معهما فى مستو واحد وان احداثياتهما هى سَ و صَ و سً و صً فيكون سً - سَ و صً - صَ هما مسقطى المستقيم مَ مً اللذين يمكن تعيينهما بالطول مَ مً والزاوية الحادثة من هذا المستقيم مع المحور وس (شكل ٤٢)

شكل ٤٢

لانه اذا رسم مَ هس و مَ هص موازيين للمحورين وس و وص ومتحدين معهما كان هس و هص اللذان هما احداثيا النقطة مً بالنسبة لهذين المحورين الجديدين القائمين متحدين فى المقدار والاشارة مع المسقطين سً - سَ و صً - صَ وكانت الزاوية الحادثة من المستقيم مَ مً مع المحور مَ هس متحدة فى المقدار والاشارة مع المحور وس واذن يحصل بمقتضى ما ذكر فى (بند ٣٣) من حساب المثلثات بعد جعل مَ مً

= ل و (ل رس) رمزا للزاوية الواقعة بين المستقيم الواصل من النقطة مَ الى النقطة مً ومحور س أن

س = ل حتا (ل رس) و ص = ل حا (ل رس)

وحينئذ اذا رمز بالرمز (ل رس) الى الزاوية الحادثة من المستقيم مَ مً ومحور س تحصل للمسقطين القائمين للمستقيم مَ مً

سً - سَ = ل حتا (ل وس) و صً - صَ = ل حا (ل وس)

ومما ينبغي التنبيه عليه في هذين القانونين ان الرموز سً و سَ و صً و صَ الموجودة في الطرفين الأولين تدل على اطوال مسبوقة باشارات فاما الرمز ل الموضوع خارج القوسين فانه يدل على طول فقط وأما الرمزين ل رس الموضوعان داخل القوسين فانهما يدلان على الزاوية الواقعة بين المستقيم مَ مً ومحور س

بند ٥٥ القانون سً - سَ = ل حتا (ل وس) يتعين برايض المسقط القائم على محور كالمحور وس الذى لا يوجد مع المستقيم المذكور في مستو واحد بحيث لا يطلق اسم الزاوية الحادثة في الفراغ من مستقيمين حيثما اتفق الا على الزاوية التي تحدث من رسم ضلعين موازيين للمستقيمين المذكورين لأن المسقط القائم ع عً (شكل ٤) للمستقيم مَ مً على المحور وس يتحصل بهذه الكيفية وهى ان يرسم من النقطتين مَ و مً المستويان مَ هَ عَ و مً هً عً عمودين على المحور وس

ومتقاطعين معه فى النقطتين:

حَ وحً فاذا رسم من

النقطة مَ الخط مَ بس

موازيا للمحور وس ومتحدا

معه فى الجهة فان

المسقط مَ ؟ اى الاحداثى

بس المنسوب للمستقيم مَمً

على هذا المحور الجديد يكون متحدا فى الطول والاشارة

مع المسقط حَ حً لكونهما متوازيان ومتحدان فى الجهة

ومحصوران بين مستويين متوازيين ولما كان الخط المسقط

مَ ؟ عمودا على مَ ؟ حدث (كما فى البند السابق

مَ ؟ أى بس = ل جتا (ل، بس)

واذاً يحصل سً - سَ = ل جتا (ل، بس)

اعنى ان المسقط القائم لمستقيم على محور حيثما اتفق يكون

مساويا لحاصل ضرب طول هذا المستقيم فى جيب تمام الزاوية

الحادثة منه مع المحور

بند ٦ ويؤخذ من هذه الدعوى والدعوة المتقدمة

(فى بند ٥) هذه الدعوى الكثيرة الاستعمال وهى

دعوى نظرية

اذا كانت طريق كثيرة الاضلاع مَ مً مًّ ...... م توصل من

النقطة مَ الى النقطة م فان المجموع الجبرى لحواصل ضرب
الطرق المستقيمة الجزئية مَ مً وه مً مً وهلم مضروبة كل
واحدة منها فى جيب تمام الزاوية الحادثة من تلك الطرق
الجزئية مع محور حيثما اتفق يكون مساويا لمسقط الطريق
المستقيمة مَ م على المحور المذكور والقانون المحتوى على هذه
الدعوى هو

س - سَ = لَ حتا (ل وس) + لً حتا (لً وس) + لً حتا (لً وس) وهلم

وهذا القانون يكتب بالاختصار هكذا

س - سَ = ك ل حتا (ل وس)

وذلك بوضع الرمز ك بدل مجموع عدة من الحدود المتشابهة
وجعل ل رمزا لكل من اضلاع المضلع وه (ل وس) رمزا
للزاوية الحادثة منه مع المحور

بند ٥٦ بمقتضى القانون المتقدم فى (بند ٥٥) يتحصل المساقط
مستقيم كالمستقيم ل على ثلاثة من المحاور الاحداثية القائمة
سً - سَ = ل حتا (ل وس) وه صً - صَ = ل حتا (ل وص) وه
عً - عَ = ل حتا (ل وع) *

فاذا اضيف الى هذه المعادلات المعادلة المتقدمة فى (بند ٤٤) وهى
(سً - سَ)٢ + (صً - صَ)٢ + (عً - عَ)٢ = ل٢

شوهد انه يكفى معرفة كل من اطوال واشارات المساقط الثلاثة
سً - سَ وه صً - صَ وه عً - عَ ليؤخذ منها الطول ل ثم
مقادير جيوب التمام الثلاثة المتحدة مع المساقط فى الاشارات

مسئلة

بند ٥٨ اذا علمت الاحداثيات الثلاثة س وص وع لنقطة كالنقطة م بالنسبة لثلاثة من المحاور الاحداثية كالمحاور وس وص وع وكان المراد ايجاد الاحداثى الافقى القائم ﻫ لهذه النقطة محسوبا بالابتداء من نقطة الاصل و على محور كالمحور وﻫ الذى يحدث منه مع المحاور الثلاثة الاحداثية زوايا معلومة

يقال حيث ان يتكون من الاحداثى الافقى س مع مستقيمين موازيين للاحداثيين الآخرين ص وع طريق كثيرة الاضلاع توصل من نقطة الاصل و الى النقطة م وان المجموع الجبرى لمساقطها القائمة على وﻫ يساوى ﻫ الذى هو مسقط وم على المحور المذكور (ب ٥٠) فاذا فرض بمقتضى ما ذكر الاحداثيات س وص وع موجبة فانه يحدث بمقتضى (ب ٥٥)

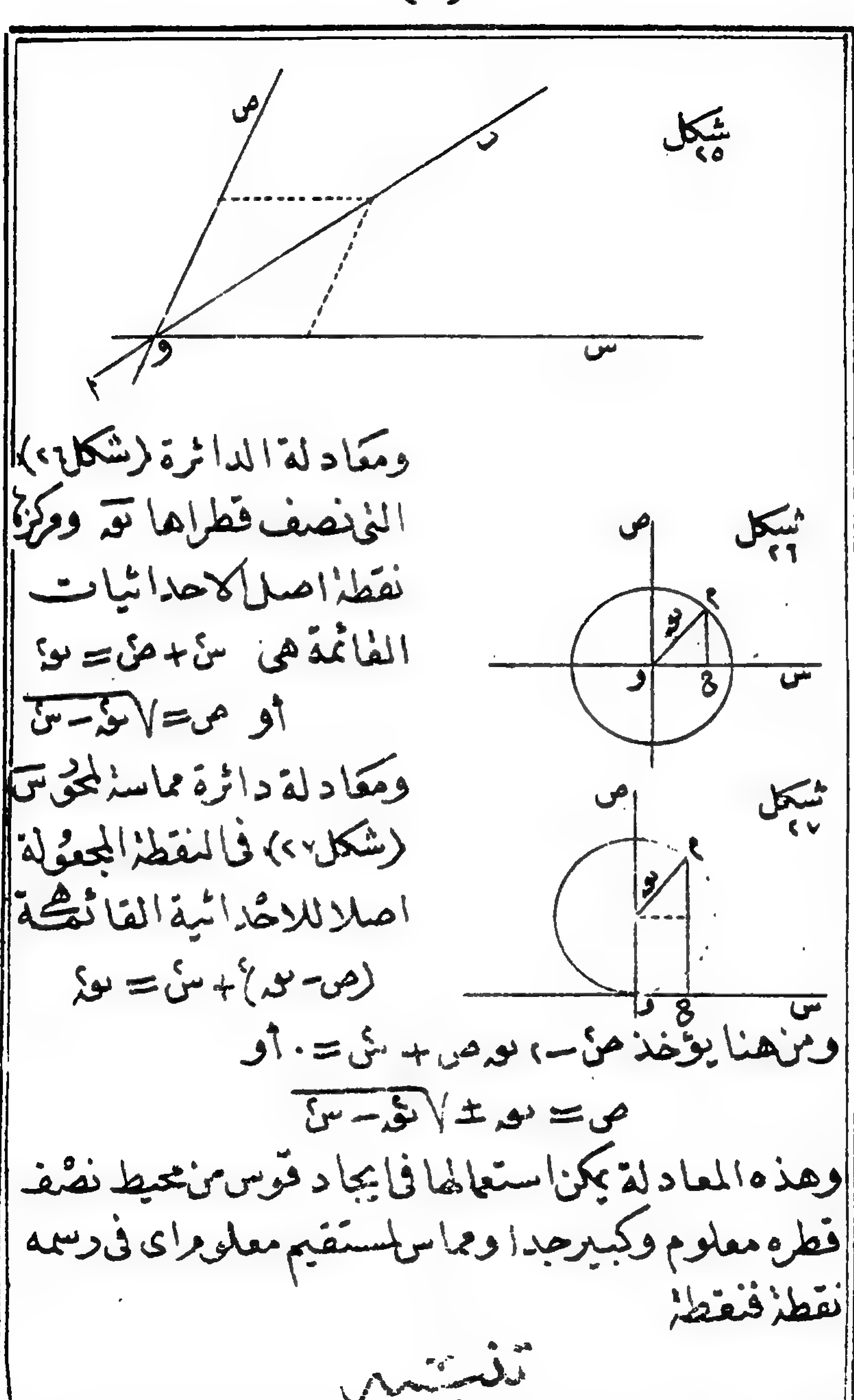
ﻫ = س جتا (س وﻫ) + ص جتا (ص ﻫ) + ع جتا (ع وﻫ)

والرموز الموجودة فى هذه المعادلة داخل القسى تدل على الزوايا الحادثة من المحور الجديد وﻫ المأخوذ فى جهته الموجبة مع الاحداثيات الثلاثة أو مع المحاور الثلاثة الاحداثية المأخوذة فى جهتها الموجبة فاذا فرض الآن أن أحد الاحداثيات وهو س مثلا سالب فمن البديهى ان يكون

لمسقطه اشارة مخالفة للاشارة التي كانت له في الغرض الأول وحينئذ يكفي لذلك في الحاصل س صا (س و ص) المنسوب لهذا الاحداثي ان يعطى للمقدار المخصوص المنسوب للمضروب الاول من هذا الحاصل الاشارة الموافقة له بحسب جهته وان لا يراد دائما من (س و ص) غير زاويتي المحورين وس وه وص المعلومة من منطوق المسئلة

تعريفات تتعلق بمعادلة الخط

بند ٥٩ اذا كان وضع عدة نقط من خط حيثما اتفق تابعا لقاعدة واحدة فانه يمكن عند نسبة هذا الخط لمحورين احداثيين معلومين ايجاد ارتباط ثابت بين احداثيات نقطة من نقط الخط ماخوذة بالاختيار وهذا الارتباط هو المعروف بمعادلة الخط المنسوب للمحورين المعلومين وحينئذ يلزم لايجاد معادلة منحنى بواسطة احداثيين موازيين لمحورين أن يرسم في مستوى هذا المنحنى المحوران الاحداثيان وس وه وص وان يستنبط من تعريف المنحنى ومعاليم المسئلة ارتباط بين الاحداثيين س وه ص لنقطة من نقط المنحنى فيكون هذا الارتباط هو المعادلة المطلوبة مثلا معادلة المستقيم اب (شكل ٥) الذي يقسم الزاوية الواقعة بين المحورين وس وه وص الى جزئين متساويين هي س = ص *



ومعادلة الدائرة (شكل ٢٦) التي نصف قطرها نق ومركزها نقطة اصل الاحداثيات القائمة هي $س^2 + ص^2 = نق^2$

أو $ص = \sqrt{نق^2 - س^2}$

ومعادلة دائرة مماسة لمحور س (شكل ٢٧) في النقطة المجعولة اصلا للاحداثية القائمة هي

$$(ص - نق)^2 + س^2 = نق^2$$

ومن هنا يؤخذ $ص^2 - ٢\,نق\,ص + س^2 = ٠$ أو

$$ص = نق \pm \sqrt{نق^2 - س^2}$$

وهذه المعادلة يمكن استعمالها في ايجاد قوس من محيط نصف قطره معلوم وكبير جدا ومماس لمستقيم معلوم اذ في رسمه نقطة فنقطة

تنبيه

معادلة

معادلة متغيرين كالمتغيرين س و ص تكتب على وجه الاختصار هكذا د(س وص)=. وهذا الرمز يلفظ به هكذا دلالة س و ص تساوى صفراً وانها تكتب هكذا ص= د(س) وهذا الرمز يلفظ به هكذا ص يساوى دلالة س وفى هذه الحالة يفرض ان المعادلة محلولة بالنسبة الى ص

تعريفات تتعلق بالميزان الهندسى

بند ٦٠ اذا جعل س و ص رمزين للاحداثيين الافقى والراسى لنقطة منسوبة لمحورين معينى الوضع فى مستو فكل معادلة مبينة بدلالة د(س وص)=. بين المجهولين المذكورين س و ص تدل مهما كانت درجتها على عدة نقط منسقة الوضع فى هذا المستوى لانه يتحصل من حل المعادلة بالنسبة الى ص

ص = د(س)

وحيث ان أى مقدار يعطى بالاختيار للمجهول س يقابل دائما مقدارا واحدا أو عدة مقادير للمجهول ص فاذا اعطى للمجهول س سائر ما يراد من المقادير تحصل للمجهول ص مقادير مقابلة لتلك المقادير

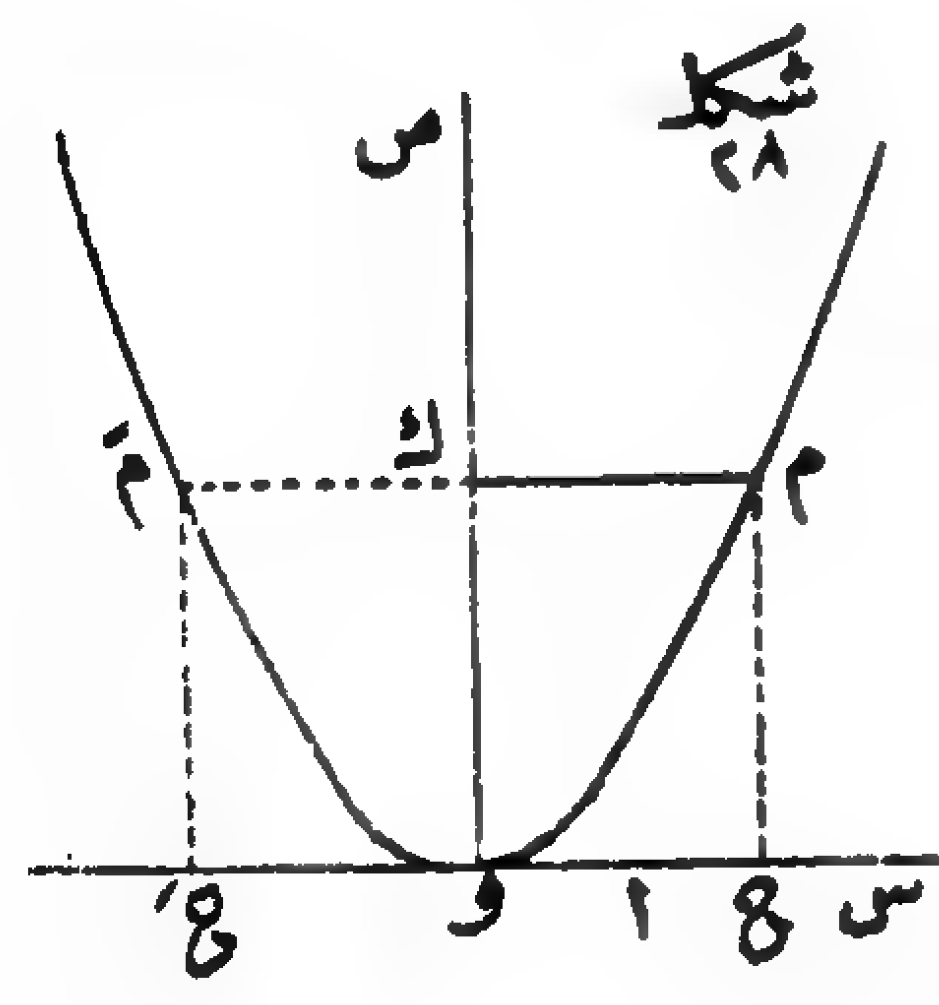
فاذا تعينت بطريق الرسم مقادير س المقابلة لمقادير ص فانه يتحصل من ذلك نقط بقدر ما يراد وزيادة على ذلك انه اذا كانت المقادير المنسوبة للمجهول س متقاربة من بعضها

بالكفاية كانت مقادير المجهول ص متقاربة من بعضها أيضاً ويتكون من النقط بضمها الى بعضها منحن متسق هو المسار الهندسي للمعادلة

د (س و ص) = ٠

مثال على رسم مسار معادلة

اذا أريد رسم مسار المعادلة حـ ص = س٢ التي يدل فيها حـ على طول معلوم و ص س و ص على احداثي نقطة من الخط المذكور فحيث ان المعادلة متجانسة والوحدة اختيارية يمكن جعل حـ = ١ وبذلك يكون ص = س٢ فاذا فرض للمجهول س مقادير موجبة وسالبة فانه يتحصل للمجهول ص مقادير مقابلة لتلك المقادير واذا اخذ وا مساويا لوحدة الطول و س = ٢ × وا = و ح كان ص = ٤ × وا = و ك وتحصلت النقطة م من المسار (شكل ٢٨)



ولادراك الصورة العمومية للمنحنى يفرض للمجهول س مقادير موجبة وسالبة هكذا

س = ٠ ، ± ١ ، ± ٢ ، ± ٣ ، ...... ص

ص = ٠ ، ± ١ ، ± ٤ ، ± ٩ ، .... ص

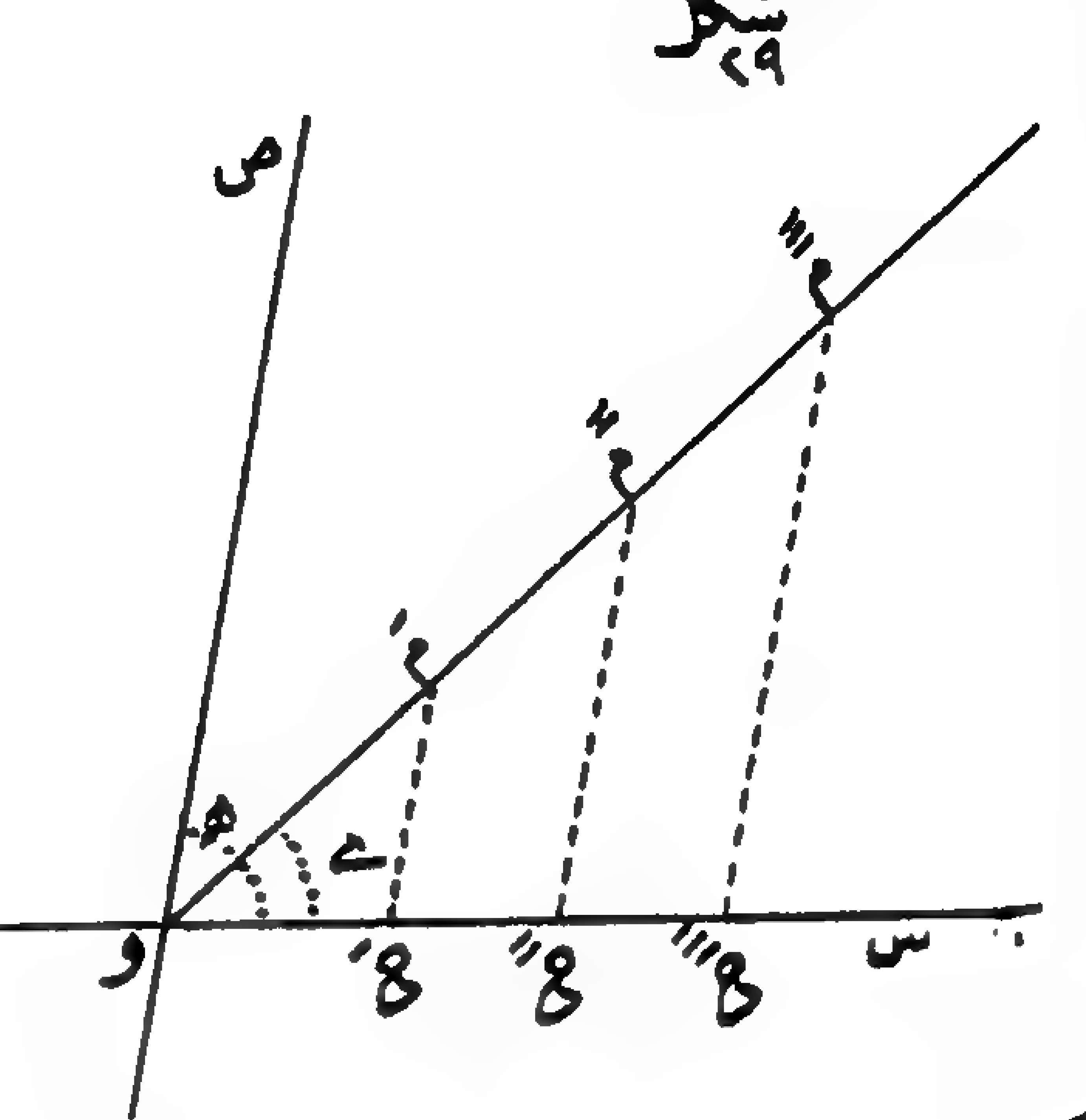
وحيث انه ان كان س = ٠ كان ص = ٠ فذلك يدل على أن المنحني يمر بأصل الاحداثيات ولما كان من المشاهد أيضاً أن

الاحداثى الراسى لواحد يقابل احد اثنين افقيين الا انهما مختلفان فى الاشارة فهذا يدل ايضا على ان المنحنى يكون متماثل الوضع بالنسبة الى محور ص وحيث انه يرى كذلك انه ان زاد س الى غير نهاية زاد ص الى غير نهاية ايضا ففى هذا دليل على ان المنحنى يمتد الى غير نهاية فوق محور الاحداثيات الافقية الموجبة والسالبة وهذا المثال يكفى فى بيان كيفية تعيين مسار معادلة بطريق الرسم

فى المستقيم

بند ٦١ كل مستقيم منسوب لمحورين احداثيين بينهما زاوية حيثما اتفق يتعين جبريا بمعادلة ذات درجة اولى تتعلق بجميع نقطه دون غيرها وللبرهنة على هذه القضية يقال اذا كان اولا المستقيم المذكور منطبقا على احد محورى الاحداث او موازيا له فلا تكون معادلته محتوية الا على متغير واحد ومن البديهى مثلا ان س = ٠ هى معادلة محور ص و س = ب هى معادلة المستقيم الموازى لمحور ص و ص = ٠ هى معادلة محور س و ص = حـ هى معادلة المستقيم الموازى لمحور س

وثانيا اذا فرض ان المستقيم يمر بنقطة الاصل (شكل ٢٩)



فان معادلته تكون بهذه الصورة وهى ص = ح س والمكرر ح هو هنا عدد مجرد قد يكون موجباً وقد يكون سالباً لانه اذا فرض على المستقيم المذكور نقط حيثما اتفق كالنقط مَ و مً و مٍّ التى احداثياتها هى سَ و صَ و سً و صً و سٍّ و صٍّ والخ فمن البديهى أنه يتحصل مهما كانت اشارة هذه الاحداثيات

صَ/سَ = صً/سً = صٍّ/سٍّ والخ

اعنى أن النسبة ص/س تكون ثابتة فاذا رمز اليها بالرمز ح حدث

ص = ح س

وهذه هى معادلة المستقيم المار بنقطة الاصل *

ويكون المكرر ح هنا عدداً مجرداً موجباً ان كان المستقيم قاسماً للزاوية س و ص هى والزاوية المقابلة لها وسالبا ان كان قاسماً للزاويتين الأخريين

فاذا تكون من المحورين و س و و ص زاوية كالزاوية هـ ومن المستقيم م مً مع المحور و س زاوية كالزاوية ى فمن

البديهي أنه يتحصل كما ذكر في (٣٥ ذ) من حساب المثلثات *

$$\frac{ص}{س} = \frac{جا ى}{جا(هـ - ى)} = م$$

فاذا كان المحوران وس و وص قائمين كانت النسبة م مساوية ظا ى وهذه النسبة هي التي يطلق عليها على سبيل الاختصار اسم ميل المستقيم على محور س ويطلق على عكسها وهي $\frac{1}{م}$ اسم ميل المستقيم على محور ص

ويقال للاحداثيين س و ص المنسوبين لنقط مستقيم واحد مار بنقطة الاصل متغيران متناسبان تناسبا طرديا وان اختلفا في الاشارة

واذا لم يكن المستقيم موازيا لأحد المحاور ولا مارا بنقطة الاصل كالمستقيم ع ك مثلا (شكل ٣٠) فان معادلته تكون بهذه الصورة وهي

$$ص = م س + ب$$

بفرض ان العدد م لم يزل مجردا وثابتا ومقداره واحد بنسبة الزوايا كما في الحالة السابقة وأن ب كناية عن طول موجب أو سالب يسمى بالاحداثي الرأسي المقابل لنقطة الاصل ويتضح ذلك اذا رسم من نقطة الاصل مستقيم موازٍ للمستقيم المذكور لانه

شكل ٣٠

يشاهد أن الاحداثي الا فقي الواحد يقابله راسيا للمستقيمين لا يختلفان عن بعضهما الا بطول ثابت *

بند ٦٢ الكميتان س وص الداخلتان في معادلة خط مستقيم هما المعروفتان بالمتغيرتين وأما الكميتان ح و ب فهما المعروفتان بالثابتتين لكن من المعلوم أن الكميتين ح و ب تكونان قابلتين للتغير ولا يقع ذلك الا عند تغير وضع المستقيم وبناء على ذلك تكون المعادلة ص = ح س + ب متعلقة بنقط مستقيم واحد يتميز عن غيره بالكميتين ح و ب

بند ٦٣ وبالعكس كل معادلة ذات درجة أولى كالمعادلة م ص + ؟ س + هـ = . الموافقة بين الكميتين المتغيرتين س و ص تكون منسوبة لخط مستقيم يمكن رسمه بشرط أن يكون س و ص في هذه المعادلة كناية عن احداثي نقطة منسوبة لمحورين معلومين بينهما زاوية حيثما اتفق و م و ؟ كناية عن عددين مجردين معلومين و هـ كناية عن طول معلوم لانه يمكن وضع المعادلة المتقدمة التي هي أعم المعادلات ذات الدرجة الأولى بهذه الصورة وهي

$$ص = -\frac{؟}{م} س - \frac{هـ}{م}$$

وبجعل $-\frac{؟}{م} = ح$ و $\frac{هـ}{م} = ب$ تؤول هذه المعادلة الى

$$ص = ح س + ب$$

فاذا اخذ على محور ص طول وك = ب (شكل ٣١) ورسم

المستقيم

المستقيم ك ع على وجه بحيث
يكون د = ظا ى = ظا ك ع و
ان كانت المحاور قائمة
و د = حا ى / حا (هـ - ى) ان كانت
هذه المحاور مشكونة بينها
زاوية قدرها هـ فتكون
معادلة المستقيم ك ع المرسوم
بهذه الكيفية هي

شكل ٣١

ص = د س + ب

وحينئذ يثبت المطلوب
ويمكن أيضا رسم مستقيم المعادلة ص = د س + ب
مع السهولة بواسطة تعيين اثنتين من نقطه بأن يقال
حيث أن الاحداثي الافقي للنقطة ك التي هي نقطة تقاطع
المستقيم مع محور ص معدوم فاذا جعل س = ٠ في المعادلة
المذكورة تحصل من ذلك الاحداثي الراسي المقابل لنقطة
الاصل وكذلك اذا جعل فيها ص = ٠ تحصلت النقطة ع
التي هي نقطة تقاطع المستقيم مع محور س وهذه قاعدة
عامة لايجاد نقط تقاطع خط مستقيم أو منحن مع المحاور
الاحداثية وحينئذ اذا جعل س = ٠ كان ص = ب = وك
واذا جعل ص = ٠ كان س = − ب/د = وع فاذا وصل
بين النقطتين ك و ع المعينتين بهذه الكيفية بالمستقيم

لج كان هذا هو المستقيم المطلوب

ومن المهم انه ينبغي التمرين على رسم مستقيمات معادلات معينة كالمعادلات الآتية وهي

٢ص + س = ر

و ص = − ٣ + س

و ص = − س − ١

و ....

و ص = ٣ س

فاذا كان المستقيم مارا بنقطة الاصل كما في المعادلة ص = ٣ س فلا يمكن بالكيفية السابقة غير تعيين نقطة واحدة وحينئذ يلزم لتعيين نقطة اخرى من هذا المستقيم جعل س = ١ فيكون ص = ٣

بند ٦٤ اذا كان المراد ايجاد معادلة مستقيم مار بنقطتين معلومتين وفرض ان (سَ وصَ) هما احداثيا النقطة الاولى من هاتين النقطتين وان (سً وصً) هما احداثيا النقطة الاخرى منهما بحيث ان معادلة المستقيم هي على العموم ص = حـ س + ب التي فيها حـ و ب كميتان مجهولتان وان المستقيم يمر بالنقطة (سَ صَ) فتكون احداثياتها محققة للمعادلة وبناء على ذلك يحدث صَ = حـ سَ + ب

وبطرح المعادلتين المذكورتين من بعضهما لاجل حذف الكمية المجهولة ب يحدث

ص - صَ = هـ (س - سَ) ....(١)

وهذه هي المعادلة المنسوبة لسائر المستقيمات التي تمر بالنقطة (سَ وصَ) ولا تتميز عن بعضها الا بمقدار هـ اعني باتجاهها *
وحيث ان المستقيم المذكور مار بالنقطة (سً وصً) تتحصل هذه المعادلة وهي

صً - صَ = هـ (سً - سَ) التي يؤخذ منها

هـ = $\frac{\text{صً - صَ}}{\text{سً - سَ}}$ ومن هنا ينتج ص - صَ = $\frac{\text{صً - صَ}}{\text{سً - سَ}}$ (س - سَ) (٢)

وهذه هي معادلة المستقيم المار بالنقطتين المذكورتين لانه يؤخذ من فرض س = سَ أن ص = صَ ومن فرض س = سً أن ص = صً *

وبهذه المعادلة تتعين جميع الاوضاع الممكنة للمستقيم لانه الاحداثيات سَ و صَ و سً و صً اختيارية

فان فرض أن صً = صَ آلت معادلة ٢) الى ص = صَ وحينئذ يكون المستقيم موازيا لمحور الافقيات س لانه يمر بنهايتي الراسيين المتساويين م هـ و مَ هـَ (شكل ٤٢)

وان فرض أن سً = سَ كان المضروب فيه الذى هو سً - سَ الكائن في الطرف الثاني غير محدود لكن اذا احلت المعادلة بالنسبة الى س - سَ حدث

س - سَ = $\frac{\text{سً - سَ}}{\text{صً - صَ}}$ (ص - صَ)

شكل ٤٢

فاذا افرض الآن أن سً = سَ صار س = سَ وهذا يدل على أن المستقيم يكون موازيا لمحور الراسيات ص لأنه يمر بهما بين الافقيين المتساويين م ك وم ًك (شكل ٤٣)

واذا فرض أن سً = سَ وصً = صَ

آلت معادلة (٢) الى

ص
شكل ٤٣
ًك ًم
ك م
سَ ا هـ س
صَ

$$ص - صَ = \frac{0}{0}(س - سَ)$$

وحينئذ يكون مكرر س - سَ غير معين وبذلك يأخذ المستقيم جميع الأوضاع الممكنة حول النقطة التي احداثياها سَ وصَ لأن النقطتين المعلومتين يؤولان الى نقطة واحدة وبالنقطة الواحدة تمر مستقيمات لا حصر لعددها *

واذا فرض أن سَ = ٠ وصَ = ٠ آلت معادلة (٢) الى

$ص = \frac{صً}{سً} س = هـ س$ وهي معادلة مستقيم مار بنقطة الأصل *

اذا كان المراد ايجاد الزاوية الواقعة بين مستقيمين معلومين بمعادلتيهما وهما

$$ص = هـ س + ب \quad و \quad ص = هـَ س + بَ$$

يفرض لذلك أن اح هو المستقيم الأول (شكل ٤٤) وأن ى هي الزاوية الحادثة منه مع المحور وس وأن اَحَ هو المستقيم الثاني وأن ىَ هي الزاوية الحادثة من هذا المستقيم او من موازيه ولَ المار بنقطة الأصل مع المحور وس فيكون

ل و س = ى و ل و س = ى
وتكون الزاوية ء = ى ـ ىَ
وحيث انه تقدم في القانون
١٧ من بند ٥٢) من حساب المثلثات

ظا ء = (ظا ى ـ ظا ىَ) / (١ + ظا ى ظا ىَ) = (ح ـ حَ) / (١ + ح حَ) ..... (٢)

فاذا كان ح = حَ فان المستقيمين يكونان متوازيين

شكل ٤٤

ويكون ء = ٠ في هذا الفرض وهذا بديهي واذا كان ح حَ + ١ = ٠ كان ظا ء = ∞ وحينئذ تكون الزاوية ء قائمة واذن فشرط كون المستقيمين المذكورين يكونان متوازيين أو عمودين على بعضهما هو ان يكون

ح = حَ ...... (٣) أو ح حَ + ١ = ٠ (٤)

بند ٦٥ اذا كان المراد من نقطة معلومة رسم مستقيم يكون موازيا لمستقيم معلوم او عمودا عليه او مكونا معه زاوية معلومة يفرض لذلك أن ص = ح س + ب هي معادلة المستقيم المعلوم *

وأن ص = حَ س + بَ هي معادلة المستقيم المجهول وحينئذ يلزم تعيين كل من حَ و بَ بأن يقال حيث ان هذا المستقيم المجهول يمر بالنقطة المعلومة (سَ ، صَ) تحدث هذه المعادلة وهي (ص ـ صَ) = حَ (س ـ سَ) وعلى ذلك لم يبق غير تعيين حَ فان كان المستقيم الثاني موازيا للأول كان ح = حَ وكانت

ص - صَ = ه (س - سَ) هي المعادلة المطلوبة وان كان عمودا عليه كان ه هَ + ١ = ٠

أو هَ = $-\frac{1}{\text{ه}}$ ومن هنا ينتج ص - صَ = $-\frac{1}{\text{ه}}$ (س - سَ) ...(٥)

وان كان المستقيمان مكونين بينهما زاوية كالزاوية ء التى ظلها المعلوم يساوى م يجعل م = ظا ء في المعادلة (٢) فيحدث

هَ = $\frac{\text{ه} - \text{م}}{\text{ه م} + 1}$ و ص - صَ = $\frac{\text{ه} - \text{م}}{\text{ه م} + 1}$ (س - سَ) .... (٦)

فاذا فرض مثلا أن م = ١ تحصلت معادلة مستقيم مائل بمقدار ٤٥° على المستقيم المفروض هي

(ه + ١) (ص - صَ) = (ه - ١) (س - سَ)

بند ٦٦ اذا كان المراد ايجاد نقطة تقاطع مستقيمين معلومين يفرض لذلك أن ص = ه س + ب و ص = هَ س + بَ هما معادلتا هذين المستقيمين المذكورين ومن البديهي أن النقطة التى يتقاطع فيها هذان المستقيمان هي دون غيرها النقطة التى لا يختلف فيها س و ص عن بعضهما لأن الاحداثيين الأفقيين الواحد يقابله احداثيان رأسيان مختلفان عن بعضهما إلا في نقطة التقاطع وحينئذ اذا استخرج س و ص من معادلتي المستقيمين تحصلت احداثيات نقطة التقاطع المطلوبة وهذا حساب سهل يؤخذ منه

س = $\frac{\text{بَ} - \text{ب}}{\text{ه} - \text{هَ}}$ و ص = $\frac{\text{ه بَ} - \text{هَ ب}}{\text{ه} - \text{هَ}}$

وعلى العموم اذا استخرج س و ص من معادلتي منحنيين

عملت

تحصلت احداثيات نقطة تقاطعهما

بند ٦٧ اذا اريد ايجاد البعد الكائن بين نقطتين بعد معرفة احداثياتهما بفرض اولا أن المحوران قائمين (شكل ٢٥)

وأن م و ن هما النقطتان المعلومتان ويرسم الاحداثيات م هـ و ن ك ويمد خط ن ر موازيا لمحور الافقيات س فيؤخذ من مثلث م ن ر القائم الزاوية أن $م ن = \sqrt{ن د^2 + م ر^2}$

شكل ٢٥

فاذا رمز برمزى س و ص لاحداثيى نقطة م وبرمزى سَ و صَ لاحداثيى نقطة ن كان ن ر = س − سَ و م ر = ص − صَ

وكذا اذا رمز برمز ط للبعد المطلوب حدث

$$ط = \sqrt{(س - سَ)^2 + (ص - صَ)^2}$$

ثم بوضع النقطتان م و ن على التوالى فى جميع الاوضاع الممكنة فاذا فرض ان نقطة ن انتقلت فى اصل الاحداثيات مثلا شكل ٢٦ كان سَ = ٠ و صَ = ٠ وحينئذ يحدث $ط = \sqrt{س^2 + ص^2}$ وهذا هو بعد اى نقطة عن أصل الاحداثيات ولا صعوبة فى الحصول على ذلك لانه يحدث من مثلث ا م هـ

شكل ٢٦

القائم الزاوية أن

$$ام = \sqrt{اهـ^2 + م هـ^2} = \sqrt{س^2 + ص^2}$$

واذا انتقلت النقطتان م و ٢. الى الوضعين المعينين بالشكل ٢٧ كانت افقيتهما هي -١هـ و -١ك *

وحينئذ يكون س = -١ هـ و سَ = -١ ك *

ويكون الاحداثى الرأسى للنقطة م هو م هـ *

والاحداثى الرأسى للنقطة ٢. هو - ك ٢. *

وعلى ذلك يكون ص = م هـ و صَ = - ك ٢. *

فاذا وضعنا بدلا عن س و ص و سَ و صَ هذه المقادير في القانون العمومى حدث

$$ط = \sqrt{(-١هـ + ١ك)^2 + (م هـ + ك ٢.)^2}$$

$$= \sqrt{(١هـ - ١ك)^2 + (م هـ + هـ ر)^2} = \sqrt{٢. ر^2 + م ر^2}$$

وهذا هو عين الناتج المستخرج من مثلث م ٢. ر القائم الزاوية

شكل ٢٧

وأما اذا فرض أن محورى الاحداثيات مائلان (شكل ٢٨)

يمد خط ٢. ر موازيا لمحور الافقيات س ويرسم الاحداثيات م هـ و ٢. ك فلا يكون مثلث م ٢. ر قائم الزاوية وحينئذ يحدث كما فى حساب المثلثات

شكل ٢٨

$$م ٢. = \sqrt{٢. ر^2 + م ر^2 - ٢ ٢. ر \times م ر جتا م ر ٢.}$$

(٩ جبر)

وحيث أن زاوية م ر؟ مكملة لزاوية ص ا س فبالرمز الى
هذه الزاوية الاخيرة بحرف ل وملاحظة الرموز المتقدمة
يحدث ط = √((س − سَ)² + (ص − صَ)² + ٢ (س − سَ) (ص − صَ) حتا ل)
فاذا فرض أن ل = ٩٠° يكون حتا ٩٠° = ٠ فاذن يحدث

ط = √((س − سَ)² + (ص − صَ)²)

وهذا هو القانون المتحصل في حالة ما اذا كان المحوران قائمين

في الدائرة

بند ٦٨ في الاحداثيات القائمة معادلة محيط الدائرة التي
نصف قطرها نق واحداثيا مركزها هما ى و ىَ
هي بمقتضى (بند ٦٧) (ص − ىَ)² + (س − ى)² = نق²

بند ٦٩ فاذا كان المركز هو نقطة الاصل فانه يحدث

ىَ = ٠ و ى = ٠

واذن تؤول المعادلة المذكورة الى ص² + س² = نق²
ومن هنا يرى أن ص² = (نق + س) (نق − س)
وحينئذ يكون الاحداثي الراسي وسطا متناسبا بين قطعتي قطر
الدائرة
ومعادلة الدائرة التي مركزها نقطة الاصل تكتب غالبا هكذا

ص = ± √(نق² − س²)

بند ٧٠ اذا جعل ىَ = ٠ و ى = نق فان المعادلة تكتب هكذا

ص² + س² = ٢ نق س

و $\text{س}^{2} + \text{ص}^{2}$ هو مربع الوتر و م واذن يكون و م وسطا متناسبًا بين القطر ٢ نو والاحداثى الافقى س (شكل ٢٩)

شكل ٢٩

واذا اجعل و م = ع تحصل من المعادلة المتقدمة

$$\text{ع}^{2} = 2\,\text{نو}\,\text{س}$$

او

$$\frac{\text{ع}}{\text{س}} = \frac{2\,\text{نو}}{\text{ع}}$$

واذن يكون المثلثات و م ع و و م ا متشابهين ويكون الزاوية و م ا قائمة

بند ٧١ وبعكس ما تقدم (فى بند ٦٨) كل معادلة موضوعة بهذه الصورة وهى $\text{ص}^{2} + \text{س}^{2} + \text{ء}\,\text{ص} + \text{هـ}\,\text{س} + \text{ف} = 0$ التى يدل فيها س و ص على احداثيات قائمة و ء و هـ على طولين و ف على حاصل ضرب طولين فى بعضهما هى معادلة دائرة مالم تكن هذه المعادلة مستحيلة لانه يمكن وضع هذه المعادلة بهذه الصورة وهى

$$\left(\text{ص}^{2} + \text{ء}\,\text{ص} + \frac{\text{ء}^{2}}{4}\right) + \left(\text{س}^{2} + \text{هـ}\,\text{س} + \frac{\text{هـ}^{2}}{4}\right) = \frac{\text{ء}^{2}}{4} + \frac{\text{هـ}^{2}}{4} - \text{ف}$$

اى

$$\left(\text{ص} + \frac{\text{ء}}{2}\right)^{2} + \left(\text{س} + \frac{\text{هـ}}{2}\right)^{2} = \frac{\text{ء}^{2}}{4} + \frac{\text{هـ}^{2}}{4} - \text{ف}$$

ومن هنا يوجد لاحداثيى المركز ونصف القطر

$$\text{ص}' = -\frac{\text{ء}}{2} \quad \text{و} \quad \text{س}' = -\frac{\text{هـ}}{2} \quad \text{و} \quad \text{نو} = \sqrt{\frac{\text{ء}^{2}}{4} + \frac{\text{هـ}^{2}}{4} - \text{ف}}$$

فان كان نو تخيليا كانت المعادلة مستحيلة اعنى انها تكون مستحيلة

متى كان

$$\frac{\text{أ}^2}{٤}+\frac{\text{ه}^2}{٤}-\text{ف}\ \text{سالباً}$$

فاذا كان ف = ٠ فان المنحنى يمر بنقطة الأصل

بند ٧٢ ويسهل تعيين تقاطعات الدائرة السابقة مع المحورين ومع مستقيم معلوم ومع دائرة اخرى بمقتضى (بند ٦٦)

بند ٧٣ اذا كان المراد ايجاد مسار النقطة م التي يوجد بين بعديها م ا و م ب (شكل ٤٠) عن النقطتين ا و ب الثابتتين نسبة ثابتة هي ه : و س

يفرض أن ا ب = ح

فيحدث

$\overline{\text{م ا}}^2 = \text{ص}^2 + \text{س}^2$ و $\overline{\text{م ب}}^2 = \text{ص}^2 + (\text{س} - \text{ح})^2$ و $\overline{\text{م ا}}^2 : \overline{\text{م ب}}^2 :: \text{ه}^2 : \text{و}^2$

ومن هنا ينتج $\text{و}^2(\text{ص}^2+\text{س}^2) = \text{ه}^2(\text{ص}^2+\text{س}^2-٢\text{ح}\,\text{س}+\text{ح}^2)$

فاذا كان ه = و فان المعادلة تؤل الى $\text{س} = \frac{\text{ح}}{٢}$

وهي معادلة خط مستقيم عمود على ا ب واذا لم يكن ه = و فان المعادلة تؤل الى

$$\text{ص}^2+\text{س}^2-\frac{٢\text{ح}\,\text{ه}^2}{\text{ه}^2-\text{و}^2}\text{س}+\frac{\text{ح}^2\text{ه}^2}{\text{ه}^2-\text{و}^2}=٠$$

وهي معادلة دائرة

بند ٧٤ اذا كان المراد ايجاد المسار الهندسي للنقط م و م َ و م ً الخ

المكيفة الوضع بحيث تكون أبعادها وهي ام و ام َ و امً و الخ عن نقطة ثابتة كالنقطة ا متناسبة تناسبا عكسيا للابعاد اﻫ و اﻫَ و اﻫً و الخ المنسوبة للنقط ﻫ و ﻫَ و ﻫً (شكل) الموجودة على مستقيم واحد عن النقطة ا المذكورة او ان كان حاصل الضرب ام × اﻫ ثابتا مهما كان الاتجاه اﻫ م

شكل ٤١

يؤخذ لذلك المحور اس عمودا على المستقيم ﻫ ﻫً والمحور اص عمودا على اس فاذا فرض ان اب = ﺣ و اﻫ × ام = ﺣ ب فانه يحدث ام = $\sqrt{س^2 + ص^2}$ و اﻫ : ام :: ﺣ : س وبضرب الحدين الأولين من هذه المتناسبة في ام وابدال ام بمقداره يحصل

ﺣ ب : س² + ص² :: ﺣ : س اى س² + ص² = ب س

وهذه هي معادلة دائرة

في الاحداثيات القطبية للدائرة وفي معادلتها القطبية

بند ٦٥ يمكن تعيين وضع نقطة في مستو بكيفية اخرى غير الكيفية السابقة التي هي كما مر عن تعيينه باحداثيه الموازيين لمحورين وهذه الكيفية هي ان يعين كل من البعد وم = ل بين النقطة م ونقطة اخرى ثابتة في المستوى كالنقطة و والزاوية

م و س = هـ الحادثة من المستقيم م و مع المستقيم الثابت المعلوم الوضع و س (شكل ٤٢)

شكل ٤٢

م هـ س و

فاما النقطة و فانها تسمى بالقطب وأما البعد و م فانه يعرف بنصف القطر القطبى وأما الكميتان هـ و ل فانه يطلق عليهما اسم الاحداثيين القطبيين

والمعادلة القطبية للمنحنى هى الارتباط الواقع بين الكميتين المتغيرتين ل و هـ بالنسبة لنقطة مأخوذة بالاختيار على هذا المنحنى *

المثال الأول معادلة الدائرة التى نصف قطرها نو ومركزها القطب هى ل = نو

المثال الثانى اذا كان المستقيم غير المحدود و م ينتقل من وضعه الابتدائى و س ويتحرك حول النقطة و وفرض فى أثناء هذا التحرك أن النقطة م تتحرك على هذا المستقيم بحيث يكون ازدياد بعدها أى نصف قطرها القطبى ل مناسبا لازدياد الزاوية هـ فان المنحنى المرسوم بهذه الحالة يكون هو حلزون ارشميدس الذى معادلته هى ل = حـ هـ + ب و ب هو كناية عن نصف القطر القطبى المقابل للزاوية هـ = ٠ و حـ كناية عن ازدياد ل بالنسبة لكل ازدياد قدره واحد فى الزاوية هـ *

فى التعريفات البورية للقطع الناقص والزائد والمكافئ وفى المعادلات البورية لهذه المنحنيات

بند ٧٦ يطلق اسم القطع الناقص على منحن مقفول كالمنحنى ا اَ م مَ (شكل ٤٢) الذى يكون للبعدين ب م = ل و بَ م = لَ المنسوبين لكل نقطة منه كالنقطة م عن نقطتين ثابتتين معلومتين كالنقطتين ب و بَ مجموع ثابت هو ٢ ه

فاما النقطتان ب و بَ فانهما يعرفان بالبورتين

واما البعدان المتغيران ل و لَ فانه يطلق عليهما اسم نصفى القطرين البوريين والارتباط ل + لَ = ٢ ه هو المعادلة البورية للقطع الناقص

فاذا علم كل من البعد ب بَ = ٢ ى المنسوب للبورتين والمعادلة ل + لَ = ٢ ه فانه يسهل رسم القطع الناقص نقطة فنقطة ويمكن ايضا رسمه دفعة واحدة بواسطة خيط طوله ٢ ه طرفاه مثبتان فى البورتين ب و بَ وذلك بان يزلق على طول هذا الخيط وهو مشدود دائما قلم راسم فيرسم المنحنى المذكور

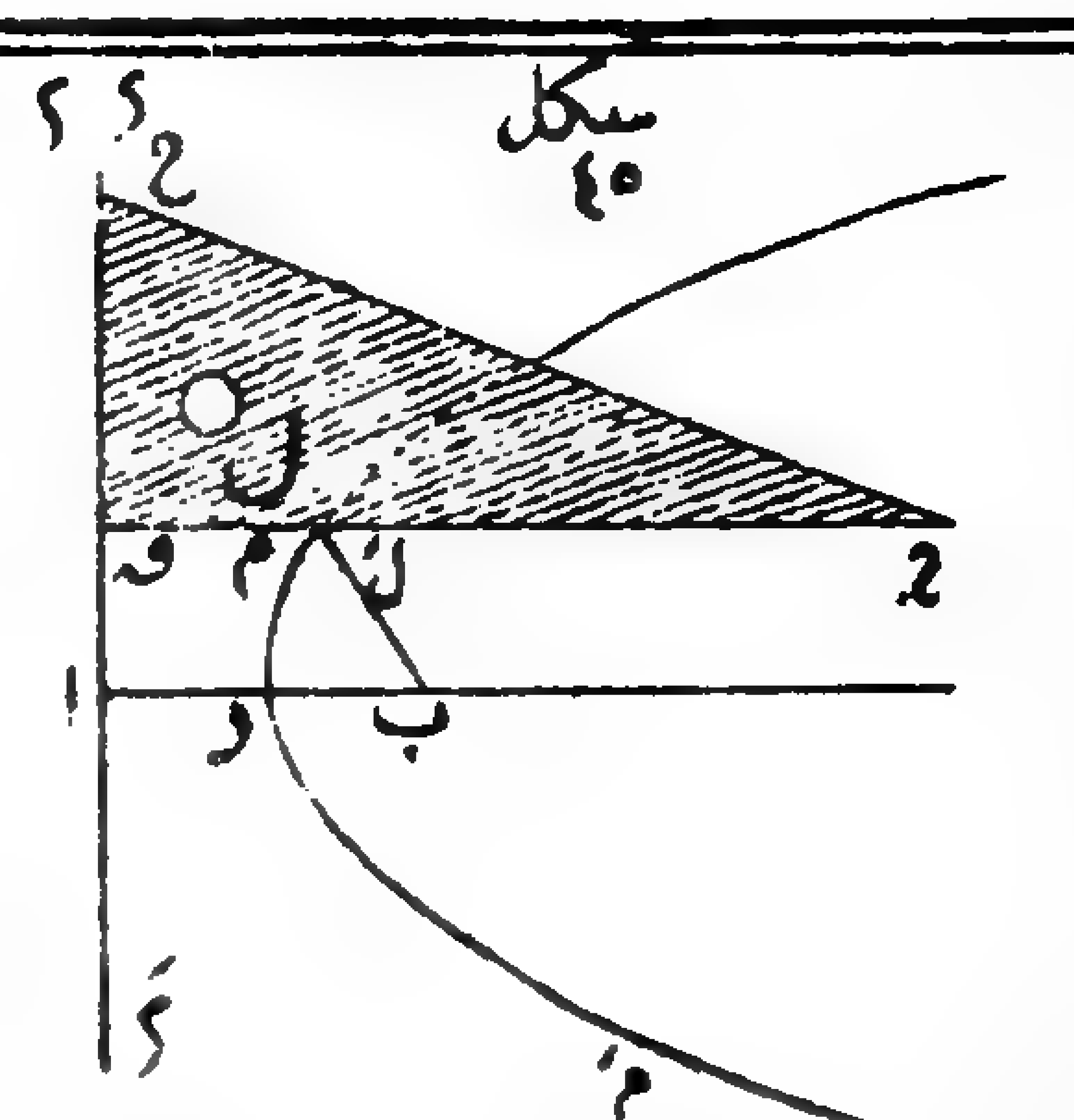
بند ٧٧ ويطلق اسم القطع الزائد على منحن كالمنحنى ا م مَ اَ مً مً (شكل ٤٤)

شكل ٤٤

الذى يكون للبعدين المتغيرين
اى نصف القطرين البورين
م ب = ل و م بَ = لَ
المنسوبين لكل نقطة منه
كالنقطة م عن نقطتين
ثابتتين معلومتين كالنقطتين
ب و بَ المعروفتين بالبورتين فاضل ثابت يساوى ٢ ح
والارتباط ل - لَ = ± ٢ ح هو المعادلة البورية للقطع الزائد
فاذا علم كل من البعد ب بَ = ٢ د والمعادلة ل - لَ = ± ٢ ح
فانه يسهل رسم القطع الزائد نقطة فنقطة ويمكن ايضا ان
يرسم دفعة واحدة قوس معين الامتداد بواسطة مسطرة
كالمسطرة ب م بأن يثبت احدى نقطها فى واحدة من
البورتين اى فى البورة ب مثلا وبواسطة خيط
كالخيط ج م بَ الذى طوله لا يختلف عن طول المسطرة الا
بكمية ثابتة هى ٢ ح يثبت من احدى طرفيه فى نقطة من
المسطرة كالنقطة ج والطرف الاخر فى البورة بَ ثم نزلق
على المسطرة قلم راسم كالقلم م والخيط مشدود على المسطرة
فيرسم قوسا من المنحنى المذكور لانه يحصل

ب م - بَ م = ب م ج - بَ م ج = ٢ ح

بند ٧٨ ويطلق اسم القطع المكافئ على منحن كالمنحنى م مَ
(شكل ٤٥) الذى جميع نقطه كالنقطة م مثلا على ابعاد



متساوية من المستقيم الثابت المعلوم ءءَ المعروف بالمستقيم الدليل والنقطة ب المعروفة بالبورة

فاذا جعل م و = ل وم ب = لَ

فان ارتباط المتغيرين ل = لَ

يكون هو معادلة القطع المكافئ المنسوب لبورته وخطه الدليل ومتى علم كل من البعد ب ا = ءء للبورة عن الخط الدليل والمعادلة ل = لَ فيمكن رسم القطع المكافئ المذكور نقطة فنقطة ويمكن ايضا أن يرسم دفعة واحدة قوس معين الامتداد بواسطة مسطرة مثلثية ح وع تزلق على الخط الدليل ءءَ وخيط يربط أحد طرفيه بالنقطة ح من المسطرة المذكورة وطرفه الآخر بالبورة ب ويكون طوله مساويا ح و ثم يزلق على طول هذه المسطرة قلم راسم والخيط مشدود فيرسم المنحنى المذكور لانه يتحصل

و م = ب م = و م ح ـ ب م ح = م ب

في معادلات القطع الناقص والزائد والمكافئ المستخرجة من خواص البورة المضادة لهذه

بند ٧٩ قد سبق تعريف القطع الناقص في (بند ٧) فاذا فرض أولا ان ب و بَ هما البورتان وان ل و لَ هما نصفا القطرين البوريين اللذين مجموعهما الثابت هو ٢ح

وأن و التي هي نقطة تنصيف بعد البورتين ب بَ هي المركز
وجعل وا = وأَ = ح فان النقطتين ا و أَ تكونان من المنحنى
المذكور فاذا رمز الى البعد ب بَ بالرمز ٢ د (شكل ٤٦)
كان بالضرورة ح > د
ويطلق على النسبة $\frac{د}{ح}$ أو $\frac{وبَ}{وا}$
اسم الاختلاف المركزى
وعلى اأَ و ددَ اسم المحورين
الاصليين وهما المحور الاكبر
اأَ = ٢ ح والمحور الاصغر ددَ = $٢\sqrt{ح^٢ - د^٢}$

بند ٨٠ ولنبحث الآن عن معادلة القطع الناقص بجعل محوريه الاصليين محورى الاحداث بأن نفرض أن ل = ح + ع و لَ = ح − ع فيحدث من المثلثين القائمى الزاوية
ب م ه و بَ م ه $ل^٢ = (ح + ع)^٢ = ص^٢ + (د + س)^٢$
و $لَ^٢ = (ح - ع)^٢ = ص^٢ + (د - س)^٢$
وباجراء عملية الطرح يحدث ٤ ح ع = ٤ د س
وبابدال ع بمقداره $\frac{د س}{ح}$ يحدث

$$ح^٢ + \frac{د^٢ س^٢}{ح^٢} = ص^٢ + د^٢ + س^٢$$

أو

$$ح^٢ ص^٢ + (ح^٢ - د^٢) س^٢ = ح^٢ (ح^٢ - د^٢)$$

بند ٨١ قد تقدم تعريف القطع الزائد فى (بند ٧٢) فاذا فرض ثانيا ان ب و بَ هما البورتان وأن ل و لَ هما نصفا القطرين البوريين (شكل ٤٧)

اللذان فاضلهما الثابت
هو ٢ﻫ وأن المركز هو
و وأن بعد البورتين
ت تَ = ٢ء فيكون ﻫ > ء
وأن المحور القاطع هو
اَا = ٢ﻫ فلا يكون
للمنحنى المذكور نقط على
المحور الآخر و ي

ولنبحث الآن عن معادلة القطع الزائد بالنسبة لمحوريه الأصليين أعنى بالنسبة للمحورين الاحداثيين القائمين و س و وص اللذين أحدهما يمر بالبورتين والآخر يمر بالمركز بأن نفرض أن ل = ع + ﻫ و لَ = ع − ﻫ فيحدث من المثلثين القائمي الزاوية ت م ق و تَ م ق

$$ل^٢ = (ع + ﻫ)^٢ = ص^٢ + (ء + س)^٢$$

$$و \quad لَ^٢ = (ع − ﻫ)^٢ = ص^٢ + (س − ء)^٢$$

وحيث ان الوضع الجبرى لهاتين المعادلتين هو عين الوضع الجبرى للمعادلتين المتقدمتين فى (ن ٨١) فيؤخذ منهما أيضا للمجهول ع المقدار $\frac{ء س}{ﻫ}$ وينتج منهما كذلك المعادلة الاخيرة (فى ن ٨١) التى يلزم وضعها بهذه الصورة وهى

$$ﻫ^٢ص^٢ − (ء^٢ − ﻫ^٢) س^٢ = − ﻫ^٢ (ء^٢ − ﻫ^٢)$$

لكون ﻫ < ء

بند ٨٢ فاذا جعلنا فى معادلة القطع الناقص المتقدمة فى (بند ٧٨) $ح^{٢} - ء^{٢} = ن^{٢}$ وفى معادلة القطع الزائد المذكورة فى (بند ٨٠) $ء^{٢} - ح^{٢} = ن^{٢}$ فانه يحدث للقطع الناقص

$ح^{٢}ص^{٢} + ن^{٢}س^{٢} = ح^{٢}ن^{٢}$ أو $\frac{ص^{٢}}{ن^{٢}} + \frac{س^{٢}}{ح^{٢}} = ١$ وللقطع الزائد $ح^{٢}ص^{٢} - ن^{٢}س^{٢} = -ح^{٢}ن^{٢}$ أو $\frac{ص^{٢}}{ن^{٢}} - \frac{س^{٢}}{ح^{٢}} = -١$

بند ٨٣ وبالعكس كل معادلة موضوعة بالصورة

$$\frac{س^{٢}}{م^{٢}} + \frac{ص^{٢}}{ن^{٢}} = ١$$

يكون فيها س و ص دالين على احداثيين قائمين و م و ن على طولين هى معادلة قطع ناقص احد محوريه التابع لمحور س هو ٢م والآخر التابع لمحور ص هو ٢ن ومحور البورتين هو اكبر المحورين وكل معادلة موضوعة هكذا

$$\frac{س^{٢}}{م^{٢}} - \frac{ص^{٢}}{ن^{٢}} = \pm ١$$

هى معادلة القطع الزائد ومحوره القاطع هو ٢م أو ٢ن بحسب ما يكون الطرف الثانى موجبا أو سالبا أو بحسب تقاطع محور س مع المنحنى المذكور أو عدم تقاطعه معه *

بند ٨٤ اذا علمت معادلة منحن امكن ان تستنتج منها سائر خواص هذا المنحنى وهذا هو المعروف بمناقشة المعادلة ولا نذكر هنا غير المهم من خواص القطع الناقص والزائد المستنبطة من معادلة هذين المنحنيين فنقول

يؤخذ من معادلة القطع الناقص وهى $\frac{س^{٢}}{م^{٢}} + \frac{ص^{٢}}{ن^{٢}} = ١$

اولا ان نقطة الاصل تكون مركزا اعنى انها تكون نقطة

تنصيف سائر الاوتار المارة بها لانه اذا كان س وص
احداثيي نقطة من القطع الناقص كان احداثيا النقطة
المقابلة لها على القطر وهما ـ س وـ ص محققين ايضا
للمعادلة

وثانيا ان كلا من محوري الاحداث يقطع الوترين الموازيين
للآخر من نصافهما لانه اذا كان س وص هما احداثيي
نقطة كانت النقطة التي احداثياتها هي ـ س وص و
س وـ ص موجودة على المنحنى

وثالثا ان طول جزئي المحورين الاحداثيين المحصورين
في المنحنى هما ٢م على محور س و٢ﻫ على محور ص لانه اذا
جعل ص=٠ كان س= ± م واذا جعل س=٠ كان
ص= ± ﻫ

فاذا احلت المعادلة بالنسبة لاحد المتغيرين وهو ص
مثلا احدث

$$ص = ± \frac{ﻫ}{م} \sqrt{م^٢ - س^٢}$$

واحد هذين المضروبين وهو $\sqrt{م^٢ - س^٢}$ او $\sqrt{(م+س)(م-س)}$
هو الوسط المتناسب بين القطعتين م + س و م ـ س
المنسوبتين للقطر ٢م واذن يكون هذا المضروب مساويا
للاحداثي الرأسي لقائم المقابل للاحداثي الافقي س
في دائرة مركزها نقطة الاصل وقطرها ٢م

وحينئذ متى كان القطع الناقص منسوبا لمحوريه الاصليين

كانت

كانت نسبة احداثيه الراسي الى الاحداثي الراسي للدائرة
المرسومة على احد المحورين المذكورين كنسبة المحور الآخر
الى المحور المعتبر قطرا لهذه الدائرة ولا شك أن هذين
الاحداثيين الراسيين يقابلهما احداثي افقي واحد *
ومن هذه الخاصية الشهيرة تؤخذ طريقة رسم القطع
الناقص نقطة فنقطة *

وهذه الطريقة هي أن يرسم دائرة على المحور الاكبر ودائرة
على المحور الاصغر وتفرض جملة نقط على محيط الدائرة
الكبرى كنقط ط، ى، ... الخ ويوصل بين هذه النقط
وبين نقطة ﺣ التي هي مركز الدائرتين بمستقيمات طﺣ، ىﺣ، الخ
فاذا امد من هذه النقط الاخيرة خطوط طَط، ىَى، ... الخ
موازية للمحور الاكبر فهذه الخطوط القاطعة للاعمدة
ط ف، ى كَ، ... الخ النازلة من نقط ط، ى، الخ في نقط
طَ، ىَ، ... الخ تكون هي النقط التي يتركب منها القطع الناقص
لانه يحدث من تشابه مثلثي ط طَ و ﺣ ط ف ﺣ

طﺣ : طَﺣ :: ط ف : طَ ف أو م : ﻧ :: ط ف : طَ ف

شكل ٤٩

وبذلك تكون نقطة طَ من نقط
القطع الناقص ويثبت أن باقي
النقط هي من نقط القطع الناقص
الذي محوراه ٢م و ٢ﻧ
(شكل ٤٩)

بند ٨٥ يستنبط من هذه الخاصية ان كل قطع ناقص يمكن اعتباره مسقط الدائرة على مستو وكل دائرة يمكن اعتبارها مسقطا لعدة من القطاعات الناقصة المشتركة معها فى محور واحد وهذه الخاصية يؤخذ منها فوائد مهمة تتعلق بالاقطار المزدوجة والاشكال المتوازية الاضلاع المرسومة فى الخارج وغيرها

بند ٨٦ قد تقدم فى (بند ٧٢) و (بند ٧٤) عند البحث على معادلة منحن معرف بخاصية هندسية انه ربما ظهر ان المنحنى المذكور يكون خطا قد علم بواسطة خواص هندسية اخرى وهاك مثالا آخر على ذلك هو انه

اذا كانت الزاوية ص و س قائمة وكان مستقيم كالمستقيم اه يتحرك على وجه بحيث يكون احد طرفيه وهو ا على المحور و ص وطرفه الآخر ه على المحور و س (شكل ٥٠)

وكان المراد ايجاد معادلة المنحنى الذى ترسمه النقطة م الموجودة على المستقيم اه المذكور التى بعداها الثابتان عن النهايتين ا و ه هما ء و ب يرسم لذلك من النقطة م المستقيمان م ع و م ك موازيين لمحورى الاحداث و ص و و س فيحدث من ذلك المثلثان م ع ه و م ك ا اللذان يؤخذ منهما

شكل ٥٠

م ع : م هـ :: ا ك : ا م أى ص : ب :: $\sqrt{ح^٢ - س^٢}$: ح
ومن هنا يرى أن ص = $\frac{ب}{ح}\sqrt{ح^٢ - س^٢}$ وهذه هى معادلة القطع الناقص

فى مناقشة معادلة القطع الزائد وهى

$$ص = \pm \frac{ب}{ح}\sqrt{س^٢ - ح^٢}$$

بند ٨٧ اذا جعل فى هذه المعادلة س = ح تحصل ص = ٠ واذا جعل س < ح كان ص تخيليا واما اذا جعل س > ح فهما كان مقداره فانه يكون للمتغير ص مقداران حقيقيان لا يختلفان عن بعضهما الا فى الاشارة واذا جعل س = ٠ كان ص = ± ب $\sqrt{-١}$ ولذا يطلق على هذه الكمية ب اسم نصف المحور التخيلى وحينئذ يكون المنحنى عبارة عن جزئين منفصلين عن بعضهما كل منهما ينقسم الى شعبتين ممتدتين الى غير نهاية فاذا احلت المعادلة بالنسبة الى المتغير س تحصل

$$س = \pm \frac{ح}{ب}\sqrt{ص^٢ + ب^٢}$$

وهى معادلة تؤخذ منها ايضا النتائج السابقة

بند ٨٨ اذا كان م و ن دالين على كميتين ثابتتين موجبتين أو سالبتين فالكمية م $\sqrt{س^٢ + ن}$ تقرب بقدر ما يراد من الكمية م س كلما كبر س أعنى أن الفرق بين هاتين الكميتين يصغر بقدر ما يراد كلما كبر المتغير س المذكور

ولبيان ذلك نفرض أن $غ = م\sqrt{س^2 + ج^2}$ فيحدث $غ^2 - م^2 س^2 = م^2 ج^2$ ومن هنا يرى أن

$غ - م س = \frac{م^2 ج^2}{غ + م س}$ وحيث ان هذا المقام يزداد الى غير نهاية كلما كبر س فيكون الفرق بين غ و م س صغيرا بقدر ما يراد

وهذه الفائدة تستعمل في معادلة القطع الزائد وتدل على انه كلما ازداد الاحداثي الافقي لهذا المنحنى قرب احداثيه الراسي بقدر ما يراد من الاحداثي الراسي لاحد المستقيمين المعينين بالمعادلة $ص = \pm \frac{ب س}{ا}$ ولا شك أن هذين الاحداثيين الراسيين يقابلهما احداثي افقي واحد والمستقيمان المذكوران و ه ر و ه َ ر َ (شكل ١٥) اللذان تقرب منهما شعب المنحنى كلما امتدت بدون ان يتلاقيا معها يطلق عليهما اسم الخطين المقربين

وهذان المستقيمان يسهل رسمهما بواسطة نصفي المحورين ج و ب أو بالمحورين ا ا َ و ء ء َ وكل مستقيم موازٍ للخط مقرب لا يتلاقى مع القطع الزائد الا في نقطة واحدة لانه لا يوجد غير مقدارين للمتغيرين س و ص تحقق بهما معا معادلتان كالمعادلتين

$$\text{ص}^2 = \frac{\text{ب}^2}{\text{ح}^2}\,\text{س}^2 - \text{ب}^2 \quad \text{و} \quad \text{ص} = \frac{\text{ب}}{\text{ح}}\,\text{س} \pm \text{ي}$$

لانه اذا رفعت المعادلة الثانية الى الدرجة الثانية وطرحت منها المعادلة الاولى حدث

$$\frac{2\,\text{ب ي}}{\text{ح}}\,\text{س} + \text{ي}^2 + \text{ب}^2 = 0$$

ومن هنا لا يتحصل للمتغير س غير مقدار واحد

واذا كان نصفا المحورين ح و ب المنسوبان للقطع الزائد متساويين كانت معادلته هى

$\text{ص}^2 - \text{س}^2 = -\text{ح}^2$ ويتكون من الخطين المقربين زاوية قائمة والقطع الزائد يطلق عليه فى هذه الحالة اسم القطع الزائد القائم

ومما يسهل مشاهدته هو ان كل قطع زائد يمكن اعتباره مسقطا لقطع زائد قائم

بند ٨٩ قد تحصلت للدائرة معادلة بسيطة (بند ٧٠) وذلك بجعل نقطة الاصل من نقط محيط الدائرة وجعل احد المحورين مارا بالمركز ولنجر ذلك فى القطع الناقص والزائد بان نجعل نقطة الاصل فى نهاية احد المحورين الاصليين للقطع الناقص وفى نهاية المحور القاطع للقطع الزائد *

وحيث انه يمكن وضع معادلة القطع الناقص عندما تكون نقطة الاصل و (شكل ٥٢) هى المركز هكذا

$$\text{ص}^2 = \frac{\text{ب}^2}{\text{ح}^2}\,(\text{ح} + \text{س})\,(\text{ح} - \text{س})$$

شكل ٥٢

فيؤخذ من ذلك ان الحاصل (ﻫ + س) (ﻫ - س) هو كناية عن حاصل ضرب اع × ع أ لقطعتي القطر ا أ المقابلتين للاحداثي الرأسي م ع

ومن البديهي انه اذا كانت نقطة اصل الاحداثيات هي ا فانه يرمز للبعد اع بالرمز س وللبعد أع بالرمز ٢ﻫ-س واذن تكون معادلة القطع الناقص المنسوب لمحورين قائمين احدهما هو المحور الاصلي ا أ والآخر وص العمودي عليه في النقطة ا التي هي نهاية القطر ا أ المذكور هي

ص² = (ك² / ﻫ²) (٢ﻫس - س²)

وكذلك متى كانت نقطة الاصل هي المركز (شكل ٥٣)

شكل ٥٣

وكان محور س هو المحور القاطع فان معادلة القطع الزائد توضع هكذا

ص² = (ك² / ﻫ²) (س - ﻫ) (س + ﻫ)

و (س - ﻫ) (س + ﻫ) هو حاصل ضرب البعدين اع و أع الواقعين بين موقع الاحداثي الرأسي ورأسي المنحني وهما ا و أ

فاذا جعلت ا نقطة اصل للاحداثيات فانه يرمز للبعد

اح بالرمز س وللبعد اَح بالرمز ٢ ح + س فتكون معادلة القطع الزائد هى

$$ص^٢ = \frac{ب^٢}{ح^٢} (٢ ح س + س^٢)$$

واذن تكون معادلتا القطع الناقص والزائد محصورتين فى هذا القانون وهو

$$ص^٢ + ٢ س^٢ = ٢ م س$$

الذى تؤخذ منه المعادلة الاولى او الثانية بحسب ما يكون ٢ موجبا او سالبا

بند ٩٠ قد سبق تعريف القطع المكافئ (بند ٧٨)

وليكن د رمز البورة القطع المكافى (شكل ٥٤) و ا ى رمز الخط الدليل و د م اول المساو وللبعد م ٢ رمزا لنصف القطر البورى فاذا رمز للبعد ا د بالرمز م التى هى كمية معلومة يختص بها هذا المنحنى وكان ا د س هو محوره الاصلى والنقطة ا هى رأسه فانه يوخذ من تعريف المنحنى المذكور ان

شكل ٥٤

$$او = و د = \frac{م}{٢}$$

بـــد ٩١ ولنبحث الآن عن معادلة القطع المكافئ بجعل محوره الاصلي احد محوري الاحداث وهو س وراسه و نقطة اصل للاحداثيات القائمة فنقول انه يؤخذ من الشكل السابق أن

ل = م ء = وج + او = س + $\frac{1}{2}$ م

و ل^{2} = $\overline{\text{مع}}^{2}$ + $\overline{\text{نع}}^{2}$ = ص^{2} + (س − $\frac{1}{2}$ م)^{2}

ومن هنا يرى أن ص^{2} = ٢م س وهذه هي المعادلة المطلوبة

بـــد ٩٢ فاذا وضع س بدل ص و ص بدل س في معادلة القطع المكافئ فانها تؤل الى س^{2} = ٢م ص أى ص = $\frac{\text{س}^{2}}{\text{٢م}}$ وهـــذه هي معادلة قطع مكافئ مساو للأول (اذا كان للكمية م مقدار واحد) غير أنه مغاير له في الوضع وكذلك يكون القطاعان المكافآن المعينان بالمعادلتين ص^{2} = −٢م س و ص = −$\frac{\text{س}^{2}}{\text{٢م}}$ متساويين غير أنهما مختلفان في الوضع

بـــد ٩٣ فاذا قارنا معادلة القطع المكافئ وهي ص^{2} = ٢م س بالمعادلة المذكورة في آخر (بـــد ٨٩) فانه يشاهد أن المعادلة ص^{2} + ء س^{2} = ٢م س تدل على واحد من المنحنيات الثلاثة المذكورة بحسب ما يكون ء موجبا أو سالبا أو معدوما ومما ينبغي التنبيه عليه في المنحنيين ذوي المركز أن م يساوي $\frac{\text{ب}^{2}}{\text{ج}}$ اعني أن م ثالث متناسب مع المحور التابع لمحور س

والمحور الثانى وأما ? فانه يساوى $\pm \frac{ك}{ه}$ وبناء على ذلك يكون $? = \pm \frac{م}{ه}$ واذن يمكن وضع المعادلة السابقة هكذا

$$ص^٢ \pm \frac{م}{ه} س^٢ = ٢ م س$$

اذا تقرر هذا ففى الحالة التى لا يعتبر فيها غير قطعة من المنحنى قريبة من رأسه الموضوع فى نقطة الاصل فانه يمكن ان يكون ه كبيرا جدا بالنسبة الى م والى اكبر مقدار للمتغير س بحيث يمكن اهمال الحد الثانى من المعادلة المذكورة وهو $\frac{م}{ه}$ س^٢ بالنسبة الى الكمية ٢م س فاذا جعل مثلا

$ه = ١٠٠٠٠٠٠$ وم $= \frac{١}{١٠٠}$ كان $ب = \sqrt{م ه} = ١٠٠$ ويحصل

$$ص^٢ = ٢ م س \pm ٠٠٠٠٠٠١ س^٢$$

ومن هنا يرى انه متى كان س صغيرا بالكفاية اى اقل من $\frac{١}{١٠٠}$ مثلا امكن اهمال الحد المحتوى على س^٢ واجراء الحساب بموجب القانون $ص^٢ = ٢ س$ أو $ص^٢ = ٢ م س$ كما فى حالة ما اذا كان المنحنى قطعا مكافئا وهذا هو الواقع فى القطاعات الناقصة التى تقطعها النجوم ذوات الاذناب حول الشمس المعتبرة بورة لها بشرط أن لا يعتبر منها غير الاجزاء الاكثر قربا من هذا الكوكب ولذا يقال للقطع المكافئ قطع ناقص (ويمكن أن يقال له أيضا قطع زائد) محوراه يكونان الا نهائيين وأما الكمية ($م = \frac{ك}{ه}$) وهى الوسط المتناسب

فانها لا تزال متناهية

بند ٩٤ مجانسة المنحنيات الثلاثة المذكورة تؤخذ ايضا من مقدار نصف القطر البورى المبين بالاحداثى الافقى فى القطع الناقص والمكافئ لانه يتحصل بموجب كل من بند ٨ و بند ٨٢

$$ل = \frac{د س}{ه} + ه$$

(وهذا هو مقدار نصف القطر البورى فى القطع الناقص ان كان $د < ه$
(ومقداره فى القطع المكافئ فان كان $د > ه$

ويمكن وضع هذه المعادلة بهذه الصورة وهى

$$ل = \frac{د}{ه} \left(س + \frac{ه^2}{د}\right)$$

اعنى ان نسبة نصف القطر البورى الى الاحداثى الافقى مضافا اليه الكمية الثابتة $\frac{ه^2}{د}$ كنسبة $د : ه$ اعنى ان نسبتهما تكون ثابتة بحيث اذا اخذ بالابتداء من النقطة و التى هى مركز المنحنى (شكل ٥٥) فى جهة الاحداثيات س السالبة بعد كالبعد و د او و د يساوى $\frac{ه^2}{د}$ واقيم على و د العمود د ك او د ك المعروف بالخط الدليل فان النسبة الواقعة بين نصف القطر البورى الذى يصل

البورة بنقطة حيثما اتفق كالنقطة م من المنحنى والبعد م ر
أو م رَ المنسوب للنقطة م عن الخط الدليل تكون د ا
ان كان المنحنى قطعًا ناقصا و د > ١ ان كان هذا المنحنى
قطعا زائدًا أو د = ١ ان كان المنحنى المذكور قطعا مكافئا
ومن هنا يستنبط تعريف مشترك بين المنحنيات الثلاثة
المذكورة

بند ٩٥ من المعلوم أن القطع الناقص والزائد
والمكافئ قد اطلق عليها من قديم الزمان اسم القطاعات
المخروطية لكونها تحدث من قطع مخروط ذي قاعدة
مستديرة بمستويات وهذه الخاصية توجد مبرهنة
في مبحث تقاطع السطوح بالمستويات غير اننا لم نذكر هنا
الا الحالة التي تكون فيها المستويات القاطعة عمودية على
المستوى الاصلي لمخروط مائل فنقول

يطلق اسم المستوى الاصلي للمخروط على المستوى المار بمركز
قاعدته المستديرة وبالعمود النازل من رأسه على مستوى
هذه القاعدة وأما المستقيمان اللذان يقطع فيهما المستوى
المذكور السطح المخروطي فانه يطلق عليهما اسم الخطين
الراسمين الأصليين

وليفرض أن ر ا و رب هما هذان المستقيمان وأن
المستوى الاصلي اب مستوى الاسقاط وأن اا َ رمزا
لأثر ومسقط المستوى القاطع وهو ايضا مسقط منحنى

التقاطع وأن اا َ = ٢ﺣ

شكل ٥٦) .

شكل ٥٦

وليكن ا ب و اَ بَ رمزين للمستقيمين الموازيين للقاعدة المستديرة للمخروط فيكون هذان المستقيمان كناية عن مسقطي الدائرتين اللتين قطراهما ا ب و اَ بَ

ويجعل ا ب = ٢ ىو و اَ بَ = ٢ ىوَ

وليكن ح رمز الكل من الاثر والمسقط القائم لاحداثي الراسي حيثما اتفق كالاحداثي ص المنسوب لمنحنى التقاطع *

فاذا جعل اا َ محورا للاحداثيات الافقية التي نقطة اصلها هي ا كان

ا ح = س و اَ ح = ٢ﺣ ــ س

فاذا رسم من النقطة ح المستقيم ك كَ موازيا للمستقيم ا ب كان قطر الدائرة يكون ص أيضا هو الاحداثي الراسي لما المسقط في ح واذن يحدث

ص٢ = ح ك × ح كَ

ويؤخذ من توازي المستقيمات ا ب و ك كَ و اَ بَ الارتباطات

$$ح ك = ا ب × \frac{اَ ح}{اَ ا} = ٢ ىو × \frac{٢ﺣ ــ س}{٢ﺣ} \quad و \quad ح كَ = اَ بَ × \frac{ا ح}{ا اَ} = ٢ ىوَ \frac{س}{٢ﺣ}$$

وبالاستبدال يحدث

$$\text{ص}^{2} = \frac{\text{بو بوَ}}{\text{حـ}^{2}}\left(\text{٢ حـ س} - \text{س}^{2}\right) \quad \text{أو} \quad \text{ص}^{2} = \frac{\text{ك}^{2}}{\text{حـ}^{2}}\left(\text{٢ حـ س} - \text{س}^{2}\right)$$

بجعل ك٢ = بو بوَ وهذه المعادلة هى معادلة القطع الناقص كما سبق فى (بند ٨٩)

بند ٩٦ اذا فرض الآن أن المستوى القاطع ع ا اَ شكل ٥٧ بقطع طيتى المخروط فانه يحدث أيضا

شكل ٥٧

$$\text{ص}^{2} = \text{ع ل} \times \text{ع لَ وع ل}$$

$$= \text{ا ب} \times \frac{\text{اَ ع}}{\text{ا اَ}} = \text{٢ بو} \times \frac{\text{٢ حـ س} + \text{س}^{2}}{\text{٢ حـ}}$$

$$\text{وع لَ} = \text{اَ بَ} \times \frac{\text{ا ع}}{\text{ا اَ}} = \text{٢ بوَ} \times \frac{\text{س}}{\text{٢ حـ}}$$

ومن هذا يؤخذ

$$\text{ص}^{2} = \frac{\text{بو بوَ}}{\text{حـ}^{2}}\left(\text{٢ حـ س} + \text{س}^{2}\right)$$

$$\text{أو ص}^{2} = \frac{\text{ك}^{2}}{\text{حـ}^{2}}\left(\text{٢ حـ س} + \text{س}^{2}\right)$$

وهذه هى معادلة قطع زائد

بند ٩٧ متى تلاقى المستوى القاطع المار بالنقطة ا مع الخط الراسم الثانى ر ب فى طية واحدة من المخروط كان المنحنى مقفولا اى قطعا ناقصا ومتى كانت نقطة التقاطع اَ فى الطية الاخرى كان المنحنى قطعا زائدا مركبا من جزئين منفصلين عن بعضهما وممتدين فى الطيتين الى غير نهاية وحينئذ لم يبق علينا غير معرفة المنحنى الحادث من المستوى القاطع ا ع

عندما يكون موازيا للخط الراسم الاصلى الثانى فيفرض لذلك (شكل ٥٨)

شكل ٥٨

أن اب = ٢ ىو وأن رب = ٢ ؟ وحيث أن ص هو أيضا الاحداثى الراسى المسقط فى ع المشترك بين المنحنى المسقط فى اع والدائرة المسقطة فى ك كَ يحدث

$$\text{ص}^{٢} = \text{ع ك} \times \text{ع كَ} \quad \text{و} \quad \text{ع كَ} = \text{اب} = ٢\,\text{ىو}$$

$$\text{و} \quad \text{ع كَ} = \text{اب} \times \frac{\text{ع ا}}{\text{رب}} = ٢\,\text{ىو}\,\frac{\text{س}}{٢\,\text{؟}}$$

ومن هنا يحدث $\text{ص}^{٢} = \frac{٢\,\text{ىو}^{٢}}{\text{؟}} \times \text{س}$

وهذه هى معادلة قطع مكاف

ومن المشاهد ان هذا هو المنحنى الذى يقرب منه قربا كليا القطع الناقص والزائد الحادث من القاطع كلما تباعدت النقطة أ عن رأس المخروط بفرض النقطة ا ثابتة الوضع وبمقتضى هذه الملحوظة يمكن استخراج معادلة القطع المكافئ من معادلتى المنحنيين السابقين لانه يمكن وضع معادلتى هذين المنحنيين هكذا

$$\text{ص}^{٢} = \frac{٢\,\text{ىو}\,\text{ىوَ}}{\text{م}}\,\text{س} \pm \frac{\text{ىو}\,\text{ىوَ}}{\text{ح}^{٢}}\,\text{س}^{٢}$$

وكلما

وكلما تباعدت النقطة اَ عن رأس المخروط قربت النسبة $\frac{ن}{ح}$ أو $\frac{اَتَ}{اا}$ من المقدار $\frac{اَتَ}{اَرَ}$ أو $\frac{ن}{ح}$ وعلى ذلك يقرب مكرر س من الكمية المنتهية $\frac{٢ن}{ح}$ وأما مكرر سٓ الذى يقرب من $\frac{ن}{ح}\times\frac{١}{ح}$ فانه يئول الى الصفر

بند ٩٨ ويوجد فى القطاعات الناقصة قطع شهير هو الحادث من المستوى القاطع اا عندما يحدث منه مع الخط الراسم الاصلى را زاوية راَا مساوية للزاوية ربا الحادثة من الخط الراسم الآخر رب مع القاعدة المستديرة اب وفى هذه الحالة يؤخذ من المثلثين المتشابهين اَاب و اَاتَ (شكل ٥٩) هذه المناسبة وهى

اب : اَا :: اَا : اَتَ أو

٢ن : ٢ح :: ٢ح : ٢نَ

أو ن نَ = حٓ

فاذن تؤل معادلة القطاع الى هذه الصورة وهى

صٓ = ٢ح س − سٓ

شكل ٥٩

واذن يكون هذه القطاع دائرة وهذه الخاصية مستعملة فى رسم الخريطات الجغرافية

فى خواص المخمسات المكافئة والزائدة

بند ٩٩ اذا كان الطرف الأول فى معادلة ذات متغيرين كالمتغيرين س و ص هو ص وحده وكان طرفها الثانى محتويا

على قوى صحيحة وموجبة للمتغير س وكانت هذه القوى ممتزجة بكميات ثابتة يقال للمتغير ص دالة صحيحة للمتغير س وحينئذ تكون المعادلة

$$ص = ا + ب\,س + ح\,س^{2} + \dots\dots\dots\dots + ر\,س^{ن}$$

التى فيها جميع أسس س أعداد صحيحة وموجبة هى فى هذه الحالة معادلة المنحنيات المعروفة بالقطاعات المكافئة وكل مقدار موجب أو سالب للمتغير س يقابله مقدار من مقادير المتغير ص فاذا آل الطرف الثانى الى الحدين الأولين فان المعادلة تكون معادلة خط مستقيم

واذا كانت المعادلة هى $ص = ا + ب\,س + ح\,س^{2}$ فانه يمكن وضعها هكذا

$$ص = ح\left(س^{2} + \frac{ب}{ح}\,س + \frac{ب^{2}}{4ح^{2}}\right) + ا - \frac{ب^{2}}{4ح}$$

وهذه المعادلة تؤل الى هذه الصورة وهى

$$ص + ے = ح\,(س + ے')^{2}$$

وبنقل محورى الاحداث كليهما بالتوازى لنفسه بحيث يحدث $ص + ے = ص'$ و $س + ے' = س'$ تؤل هذه المعادلة الى

$$ص' = ح\,س'^{2}$$

ومن هنا يرى أن المعادلة قد آلت الى ابسط صورة بواسطة نقل المحورين بالتوازى لاتجاهيهما الاصليين وأن مكرر $س'^{2}$ هو عين مكرر $س^{2}$ فى المعادلة الاصلية فان كان المحوران قائمين كانت هذه المعادلة هى معادلة قطع مكافئ محوره

الأصلى تابع لمحور ص وموازبناء على ذلك لمحور ص الاصلى فان لم يكن المحوران قائمين فانه يبدء بتحويل معادلة المنحنى بالنسبة الى محورين قائمين احدهما وس الذى يكون محور اللاحداثيات الافقية والثانى هو وص التابع لمحور وص الذى هو المحور الاصلى للاحداثيات الراسية فيحدث (شكل ٦٠)

$$\text{م ح} = \text{ص} = \text{م ع} - \text{ع ح} = \text{ص}_{١} - \frac{\text{وع}}{\text{طا د}}$$

ومن هنا يرى أن

$$\text{ص} = \text{ص}_{١} - \frac{\text{س}_{١}}{\text{طا د}}$$

$$\text{و و ح} = \text{س} = \frac{\text{وع}}{\text{جا د}} = \frac{\text{س}_{١}}{\text{جا د}}$$

فاذا وضع هذان المقداران المنسوبان لكل من المتغيرين س و ص فى المعادلة العمومية للمنحنيات المعروفة بالقطاعات المكافئة تحصلت معادلة هى عين المعادلة الاصلية فى الصورة واذن تكون المعادلة $\text{ص} = \text{ا} + \text{ب س} + \text{حـ س}^{٢}$ التى يدل فيها س و ص على احداثيين موازيين لمحورين مائلين هى معادلة قطع مكافئ محوره الاصلى مواز لمحور ص وهذه هى من الخواص المهمة فى علم المكانيكا

بند اذا أريد رسم المنحنى الذى معادلته هى

$$\text{ص} = \text{ا} + \text{ب س} + \text{حـ س}^{٢}$$

فالأولى فى الغالب أن يرسم المستقيم الذى معادلته هى

ص = ا + ب س وأن يؤخذ حـ س٢ على امتداد الاحداثى الرأسى
لهذا المستقيم

بند ١٠١ اذا كان المعلوم ثلاث نقط يمكن بها تمرير قطع
مكافئ تكون صورة معادلته بالنسبة لمحورين معلومين
هى   ص = ا + ب س + حـ س٢

ورمز بالرموز س′ و ص′ و س″ و ص″ و س‴ و ص‴
الى احداثيات النقط المذكورة ووضعت هذه الرموز فى المعادلة
العمومية تحصل من ذلك ثلاث معادلات بدرجة أولى
يتوصل بها الى تعيين المجاهيل ا و ب و حـ
ويمكن مباشرة وضع هذه المعادلة وهى

ص = ص′ ((س − س″)(س − س‴)) / ((س′ − س″)(س′ − س‴)) + ص″ ((س − س′)(س − س‴)) / ((س″ − س′)(س″ − س‴)) + ص‴ ((س − س′)(س − س″)) / ((س‴ − س′)(س‴ − س″))

التى يأخذ طرفها الثانى الذى هو بدرجة ثانية بالنسبة الى
س المقادير ص′ و ص″ و ص‴ متى جعل فيها على التوالى
س = س′ و س = س″ و س = س‴

بند ١٠٢ مناقشة معادلة المنحنى وهى
ص = ا + ب س + حـ س٢ + ء س٣ تحول الى مناقشة هذه المعادلة
الاخرى وهى ص = ء س٣

بند ١٠٣ والمعادلة العمومية للمنحنيات المعروفة بالقطاعات
المكافئة وهى

ص = ا + ب س + حـ س٢ + ... + ر سن

توصل بالطبع الى ما يعرف بحساب الفروق المنتهية التى نذكر هنا المهم منه فنقول

اذا فرض جملة متوالية من الاعداد كالاعداد ٢ و ٥ و ٩ و ٨ و ٧ و ١٠
فانه يطلق على فروقها اسم الفروق الاولية وهى ٣ و ٤ و -١ و -١ و ٣
ويطلق على فروق هذه الفروق الاخيرة اسم الفروق الثانية وهى ١ و -٥ و ٠ و ٤
وعلى فروق هذه الفروق الاخيرة اسم الفروق الثالثة وهى -٦ و ٥ و ٤
وهلم جرا

ولنطبق هذه التعاريف على عدة مقادير من كمية كثيرة الحدود للمتغير س يمكن اعتبارها دالة دائما على الاحداثى الراسى ص لمنحن احداثيه الافقى هو س يفرض أن س يأخذ المقادير المتساوية الفروق

$س_{٠}$ و $س_{١} = س_{٠} + ء$ و $س_{٢} = س_{٠} + ٢ء$ .... $س_{ن} = س_{٠} + ن ء$

التى يقابلها عدة مقادير للمتغير ص هى الاحداثيات الراسية المتساوية الابعاد المنسوبة للمنحنى وهى

$ص_{٠}$ و $ص_{١}$ و $ص_{٢}$ و $ص_{٣}$ .... و $ص_{ن}$

فتكون الفروق الاولية لهذه الجملة هى

$ص_{١} - ص_{٠}$ و $ص_{٢} - ص_{١}$ و $ص_{٣} - ص_{٢}$ و $ص_{٤} - ص_{٣}$ ..... و $ص_{ن} - ص_{ن-١}$

التى يرمز لها بالرموز

$ف ص_{٠}$ و $ف ص_{١}$ و $ف ص_{٢}$ و $ف ص_{٣}$ .... و $ف ص_{ن-١}$

وتكون الفروق الثانية لمقادير ص هى الفروق الاولية لمقادير ف وهى $ف ص_{١} - ف ص_{٠}$ و $ف ص_{٢} - ف ص_{١}$ و $ف ص_{٣} - ف ص_{٢}$ ..... الخ

التي يرمز لها بهذه الرموز وهي

ف(١) ص و ف(٢) ص و ف(٣) ص .... الخ

وهلم جرا

وحيث ان المتغير ص مستخرج بالنسبة للمتغير س أي أن ص دلالة محلولة للمتغير س فيكون ف ص هو دلالة س و ء و ف ص و ف ص و ...... الخ لا تختلف عن هذه الدلالة الا بكون المتغير س قد وضع بدله س و س و الخ أو س + ء و س + ٢ ء .... الخ

وأن ف(٢) ص هو ايضا دلالة س و ء وأن ف(٢) ص و ف(٢) ص و الخ لا تختلف عن هذه الدلالة الا بكون س قد وضع بدله س و س و ..... الخ أو س + ء و س + ٢ ء و ...... الخ

وهكذا في سائر فروق أي مرتبة

فاذا حذفت علامات المتغير ص كانت ف ص و ف(٢) ص و الخ هي دلالات س و ء التي اذا وضعت فيها بدل س المقادير س و س + ء و س + ٣ ء و ..... الخ تحصلت فروق المراتب المتقدمة

بند ١٠٤ ومن البديهي ان الفرق الأول لكمية كثيرة الحدود يساوي مجموع الفروق الاولية لسائر حدودها فاذا كان واحد من هذه الحدود ثابتا فانه ينعدم في الفرق الأول

والفرق الأول لكمية ذات حد واحد كحد ك سⁿ هو

$ك(س+ء)^{م} - ك س^{م} = ك م ء س^{م-1} + \frac{ك م (م-1)}{٢} ء^{٢} س^{م-2} + \ldots$

اعني انه يكون كمية كثيرة الحدود بدرجة م − ١ بالنسبة للمتغير س

وهذا الفرق يؤل الى الكمية الثابتة ك ء متى كان م = ١ واذن يكون ف ص كمية كثيرة الحدود بالنسبة للمتغير س وتكون درجتها أقل بواحد من درجة الكمية الكثيرة الحدود ص

بند ١٠٥ وحيث ان $ف^{(٢)}$ص هي الفرق الأول للكمية ف ص فهي كمية كثيرة الحدود يكون فيها اعظم أس للمتغير س اقل منه بواحد في الكمية ف ص وبناء على ذلك يكون هذا الاس اقل منه باثنين في الكمية ص وعلى العموم فالكمية $ف^{(م)}$ص هي كمية كثيرة الحدود بالنسبة الى س درجتها اقل منها باحاد قدرها م في الكمية ص وحينئذ ففي الحالة التي يكون فيها م درجة المتغير س في الكمية الكثيرة الحدود ص تكون الكمية $ف^{(م)}$ص كمية ثابتة لا تتعلق الا بالكميات الثابتة من الكمية الكثيرة الحدود ص وبالفرق ء المنسوب للمقادير المتوالية للمتغير س وفي تلك الحالة تكون الكمية $ف^{(م+١)}$ص معدومة مثلا ص = $س^{٣}$ − ٢ س + ٣

فاذا فرض للمتغير س عدة مقادير وكان الصفر من جملة هذه المقادير وكان الفرق الثابت هو ء = ٢ تحصلت هذه المتواليات وهي

س....	٤-	٢-	٠	+	٢	٤	٦	٨	١٠ ......
و ص....	٩٣-	١٣-	٣	٣	٣٥	١٤٧	٣٨٧	٨٠٣	
و ف ص....	٨٠	١٦	٠	٣٢	١١٢	٢٤٠	٤١٦		
و ف^٢ ص....	٦٤٠	١٦-	٣٢٠	٨٠	١٢٨	١٧٦			
و ف^٣ ص الثابتة....	٤٨	٤٨	٤٨	٤٨	٤٨				

ومن المشاهد هنا أنه يكفي ان لا يحسب بموجب القانون $س^٣$ - ٢ $س^٢$ + ٣ غير اربعة مقادير متوالية للمتغير ص وأما باقي المقادير فانها تتحصل بواسطة عمليات جمع أو طرح وهذه الطريقة تستعمل في عمل الجداول المتعلقة بحسابات عمليات الحفر والردم

بند ١٠٦ فاذا عينت من منحنى عدة احداثيات رأسية متساوية الابعاد وكانت فروقها الثانية ثابتة فانه يعلم من ذلك أن المنحنى يكون قطعا مكافئا صورة معادلته هي ص = ا + ب س + حـ $س^٢$ وقد تقدم ايضا انه متى علمت ثلاث نقط من قطع مكافئ فانها تكون كافية لتعيين المكررات ا و ب و حـ وبعد تعيين هذه المكررات يسهل حساب ما يراد حسابه من نقط المنحنى غير أن حساب المكررات المذكورة يكون مختصرا اذا كانت الاحداثيات الرأسية للنقط الثلاث المعلومة متساوية الابعاد ولذا ننقل نقطة اصل الاحداثيات الى النقطة المتوسطة مَ ونجعل ء رمزا للمسافة مَ عَ المساوية للمسافة مَ عَ و ف رمزا للاحداثي الراسي للنقطة مَ و ف

رمز للاحداثى الرأسى للنقطة $م''$ (شكل ٦١)

وتوضع معادلة المنحنى المار بالنقط الثلاث المذكورة بهذه الصورة وهى $ص = ب \frac{س}{د} + ه \frac{س^2}{د^2}$ التى يلزم ان تكون محققة بكل من مقدارى

$\frac{س}{د} = -1$, $ص = -ف_1$ و $\frac{س}{د} = 1$ و $ص = ف_2$ فيحدث

$-ف_1 = -ب + ه$ و $ف_2 = ب + ه$

ومن هنا يؤخذ $ب = \frac{1}{2}(ف_1 + ف_2)$ و $ه = \frac{1}{2}(ف_2 - ف_1)$

وحينئذ تؤل المعادلة المذكورة الى هذه الصورة وهى

$$ص = \frac{1}{2}(ف_2 + ف_1)\frac{س}{د} + \frac{1}{2}(ف_2 - ف_1)\frac{س^2}{د^2}$$

أو الى $ص = ف_2 \frac{س}{د} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{س}{د}\right)\frac{س}{د}(ف_2 - ف_1)$

فاذا كان لا يؤخذ فى حساب الاحداثى الرأسى $م ع$ المنسوب لنقطة متوسطة $م$ غير المعادلة $ص = ف_2 س$ فكأنما يفرض أن النقط $م'$ و $م$ و $م''$ تكون موجودة على خط مستقيم واحد واذا كان $م ع = \frac{1}{2} م'' ع''$ اعنى أن $\frac{س}{د} = \frac{1}{2}$ كان الخطا الناشئ عن هذا الغرض مساويا $\frac{1}{8}(ف_2 - ف_1)$

بند ١٠٧ تطبيق على حساب لوغارتمات جيوب الزوايا الصغيرة وظلالها

اذا كان المعلوم

		ف (١)	ف (٢)
لوجا ١٦َ ٤ْ	= ٢̄و٨٧١٥٦٤٦		
		١٦٩٠٠	
لوجا ١٧َ ٤ْ	= ٢̄و٨٧٣٢٥٤٦		−٦٥
		١٦٨٣٥	
لوجا ١٨َ ٤ْ	= ٢̄و٨٧٤٩٣٨١		−٦٦
		١٦٧٦٩	
لوجا ١٩َ ٤ْ	= ٢̄و٨٧٦٦١٥٠		−٦٥
		١٦٧٠٤	
لوجا ٢٠َ ٤ْ	= ٢̄و٨٧٨٢٨٥٤		

وكان المطلوب لوجا ٢١ً ١٧َ ٤ْ

فاذا جعلت الزوايا احداثيات أفقية ولوغارتمات جيوبها احداثيات رأسيه حدث من ذلك منحن يقرب قربا كليا من القطع المكافئ لان الفرق الثانى للاحداثيات الراسية المتساوية الابعاد ثابت تقريبا وعلى ذلك تؤول المسئلة الى البحث عن الاحداثى الرأسى المقابل للاحداثى الافقى ٢١ً ١٧َ ٤ْ ولنطبق المعادلة الاخيرة من بند ١٠٦) على حل هذه المسئلة ننقل نقطة الاصل الى النقطة المقابلة ١٧َ ٤ْ ونجعل وحدة المرتبة الاخيرة الاعشارية من اللوغارتمات وحدة للاحداثيات الراسية فيحدث

ف = ١٦٩٠٠ و $ف_٢$ = ١٦٨٣٥ و $ف_٢ - ف_١$ = −٦٥

و $\frac{س}{د} = \frac{٢١}{٦٠}$ و $١ - \frac{س}{د} = \frac{٣٩}{٦٠}$ و $\frac{١}{٢}\frac{س}{د}(١-\frac{س}{د})$ = ٠و١١٤ وحينئذ

يؤول مقدار ص الى ١٦٨٣٥ × $\frac{٢٦}{٦٠}$ + ٦٥ × ٠و١١٤ = ٢و٨٩٢ + ٧و٤ = ٩٠٠و٠ وهذا هو المقدار الذى يلزم اضافته الى

لوجا ١٧َ ٤ْ = ٢̄و٨٧٣٢٥٤٦ لاجل تحصيل

لوجا ٢١ً ١٧َ ٤ْ = ٢̄و٨٧٣٨٤٤٦

بند ١٠٨ فاذا علمت احداثيات ثلاث نقط من منحنٍ وكانت المسئلة التي حدث منها هذا المنحني لا يمنع من اعتباره منحنيا يقرب من القطع المكافئ ولو فيما بين النقط المذكورة فانه يمكن أن نحسب بالتقريب الاحداثيات الرأسية المتوسطة لتلك النقط بواسطة المعادلة الاخيرة من بند ١٠٦) أو بواسطة الطريقة المتقدمة في بند ١٠٠) بحسب ما تكون الاحداثيات الرأسية المعلومة متساوية الابعاد أو غير متساويتها وهذه العملية المعروفة بعملية التوسط نافعة جدا في علوم الأرصاد

مثلا بخار الماء في حالة الاشباع يحدث منه ضغط يتغير بتغير درجات الحرارة وحيث علم بالتجربة أن الضغوط ٥ و ٧ و ١٠ أمثال ضغط الجو تقابلها درجات الحرارة ١٥٢,٨ و ١٦٦,٥٠ و ١٨١,٦٠ درجة مائنية فاذا كان المراد معرفة درجات الحرارة المقابلة للضغوط ٦ و ٨ و ٩ أمثال ضغط الجو نجعل ص رمز الازدياد الحرارة بالابتداء من ١٦٦,٥٠ و س رمز الازدياد الضغط بالابتداء من ٧ أمثال ضغط الجو فينتج من ذلك هذه المعادلة وهي

ص = ا س + ب س^2 وحيث أن هذه المعادلة محققة بكل من

س = -٢ و ص = -١٣,٤٢ و س = ٣ و ص = ١٥,١٠ فيحدث من ذلك

ا = ٦,٠٣٩ و ب = -٠,٣٣٥ ومن هنا يرى أن

ص = ٦,٠٣٩ × س - ٠,٣٣٥ س^2 وهي معادلة المنحني المار بالنقط الثلاث المعلومة فاذا جعلنا فيها على التوالي

س = -١ و س = +١ و س = +٢ وأضفنا ١٦٦,٥٠

الى المقادير الثلاثة المتحصلة للمتغير ص تحصلت درجات الحرارة المطلوبة وهى
١٦٠°ر١٣ و ١٧٢°ر٢٠ و ١٧٧ر٢٤ وقد علم من التجربة مباشرة ١٦٠°ر٢ و ١٧٢°ر١ و ١٧٧ر١

بند ١٠٩ القضية المقررة (فى بند ١٠٣) تستعمل فى حل هذه المسئلة وهى المطلوب بواسطة قانون بيان مجموع مربعات الاعداد الصحيحة المتوالية من ١ الى ل

فحيث ان الفرق الاول للكمية الكثيرة الحدود $ص = اس + بس^{2} + حـس^{3}$ كمية بدرجة ثانية للمتغير س فيمكن ان يبحث عن جعل هذا الفرق مساويا $س^{2}$ متى اخذ س فى الازدياد بالابتداء من ١ وحينئذ اذا اعطى للمتغير س المقادير المتوالية

٠ و ١ و ٢ و ٣ و ...... و م-١ و م

آل المتغير ص الى

$ص_{1}$ و $ص_{2}$ و $ص_{3}$ و ...... و $ص_{م-1}$ و $ص_{م} = ام^{3} + بم^{2} + حـم$

وتكون الفروق

٠ و ١ و 2^{2} و 3^{2} و ...... و $(م-1)^{2}$

ومن هنا يؤخذ بملاحظة ان اى مقدار للمتغير ص يساوى المقدار الابتدائى . زائدا مجموع الفروق المتوسطة

$ص_{م}$ أو $ام^{3} + بم^{2} + حـم = 1 + 2^{2} + 3^{2} + \ldots\ldots + (م-1)^{2}$

وهذا هو مجموع مربعات الاعداد الصحيحة المتوالية من ١ الى م-١

وحيث ان الفرق الاول للكمية الكثيرة الحدود
ا س^{3} + ب س^{2} + ح س عندما يأخذ س في الازدياد بالابتداء
من ١ هو ٣ ا س^{2} + ٣ ا س + ا
+ ٢ ب س + ب
+ ح

وهذا الفرق يؤل الى س^{2} اذا جعل فيه
٣ ا = ١ و ٣ ا + ٢ ب = ٠ و ا + ب + ح = ٠
اعني اذا جعل فيه ا = $\frac{1}{3}$ و ب = − $\frac{1}{2}$ و ح = $\frac{1}{6}$
وحينئذ يؤل ص على العموم الى
ص = $\frac{1}{6}$ س (٢ س^{2} − ٣ س + ١)
أو انه يؤل الى ص = $\frac{1}{6}$ س (س − ١) (٢ س − ١)
واذن يحدث ١ + ٢^{2} + ٣^{2} + ... (م − ١)^{2} = $\frac{1}{6}$ م (م − ١) (٢ م − ١)
ويجعل م − ١ = ل الذي يؤخذ منه
م = ل + ١ و ٢ م − ١ = ٢ ل + ١
يحدث ١ + ٢^{2} + ٣^{2} + ... + ل^{2} = $\frac{1}{6}$ ل (ل + ١) (٢ ل + ١)
بند ١٢١ ويمكن ايضا تحصيل المربعات المتوالية للاعداد
الاولية بالابتداء من ١ بمعنى انه يلزم تعيين ص
أو ا س^{3} + ب س^{2} + ح س بحيث يكون فرقه الاول (٢ س + ١)^{2}
فاذا جعل للمتغير س المقادير المتوالية
٠ و ١ و ٢ و ٣ ...... م − ١ و م حدث للمتغير ص
٠ ص$_{1}$ ص$_{2}$ ص$_{3}$ ...... ص$_{م-1}$ ص = ا م^{3} + ب م^{2} + ح م

وتكون فروق ص كائنة عن مقادير كمية $(٢س+١)^٢$ هي

$٠ ، ١ ، ٣^٢ ، ٥^٢ .... ، (٢م-١)^٢$ ومن هنا يحدث $ص_م$

أو $ا م^٣ + ب م^٢ + حـ م = ١ + ٣^٢ + ٥^٢ + ... + (٢م-١)^٢$

ولكي يؤول الفرق الاول للكمية الكثيرة الحدود

$ا س^٣ + ب س^٢ + حـ س$ متى ازداد س بقدر ١ الى الكمية

$(٢س+١)^٢$ أو $٤س^٢ + ٤س + ١$ يكفي أن يوضع

$٣ا = ٤$ و $٣ا + ٢ب = ٤$ و $ا + ب + حـ = ١$

أعني أن $ا = \frac{٤}{٣}$ و $ب = ٠$ و $حـ = -\frac{١}{٣}$

وحينئذ يؤول ص على العموم الى $ص = \frac{١}{٣} س (٢س-١)(٢س+١)$

واذن يحدث $١ + ٣^٢ + ٥^٢ + ... + (٢م-١)^٢ = \frac{١}{٣} م (٢م-١)(٢م+١)$

ويجعل $٢م+١ = ل$ يحصل $٢م = ل+١$ و $٢م+١ = ل+٢$

واذن يحصل $١ + ٣^٢ + ٥^٢ .... + ل^٢ = \frac{١}{٦} ل (ل+١)(ل+٢)$

وهذه القوانين هي والتعاريف المتقدمة في شأن الفروق المنتهية تستعمل في حساب القناطر المعلقة

بند ١١١ المعادلة $ص = \frac{ش}{س^م}$ هي معادلة تنسب لمنحنيات تعرف بالقطاعات الزائدة ان كان م عدداً صحيحاً فاذا فرض في مبدئ الأمر أن $م = ١$ و $ص = \frac{ل^٢}{س}$ ورسم مسار هذه المعادلة فانه يتكون من ذلك منحنٍ يمتد الى غير نهاية في الزاوية ص و س الحادثة من محوري الاحداث وفي الزاوية المقابلة لها في الراس وهذا المنحني يكون بمقتضى تركيبه الرسمي قطعاً زائداً خطاه المقربان هما و س و و ص

(شكل)

شكل ٦٢

(شكل ٦٢)

غير انه يلزم تحقيق جنس هذا المنحنى بان ينسب الى المحورين القائمين و$س_١$ و و$ص_١$ اللذين احدهما يقسم الزاوية ص و س الى قسمين متساويين فيكون

$س_١ =$ س جتا (س و $س_١$) + ص جتا (ص و $س_١$) = س جتا ى + ص جتا ى

واذن يكون س + ص = $\frac{س_١}{جتا ى}$ و $ص_١ =$ س جتا (س و $ص_١$) + ص جتا (ص و $س_١$) = − س جا ى + ص جا ى واذن يكون − س + ص = $\frac{ص_١}{جا ى}$ ويمكن البحث عن س و ص لأجل وضعهما في س ص = ل وحيث انه لم يطلب هنا غير حاصل الضرب س ص فالأولى أن تربع المعادلتان السابقتان فيحدث

$$س^٢ + ٢\ س\ ص^٢ = \frac{س_١^٢}{جتا^٢ ى}$$

و

$$س^٢ - ٢\ س\ ص + ص^٢ = \frac{ص_١^٢}{جا^٢ ى}$$

ومن هنا يرى أن $٤\ س\ ص = \frac{س_١^٢}{جتا^٢ ى} - \frac{ص_١^٢}{جا^٢ ى}$

واذن تتحول المعادلة س ص = $ل^٢$ الى هذه الصورة وهي

$$\frac{س_١^٢}{٤ ل^٢ جتا^٢ ى} - \frac{ص_١^٢}{٤ ل^٢ جا^٢ ى} = ١$$

التى هى معادلة قطع زائد محوره القاطع هو ٤ل حتا٢ ى = ٢و ا
واذا كان المحوران س و ص قائمين كان
حا ى = حتا ى = ½ √٢ واذن تؤل المعادلة المتقدمة الى
س٢ - ص٢ = ٢ل٢ وهى معادلة قطع زائد قائم والمعادلة
س ص + د س + ه ص = ى التى يمكن وضعها هكذا

(ص + د) (س + ه) = ى - د ه

تؤل بداهة بواسطة نقل المحورين بالتوازى لنفسهما الى
الصورة ص س = م التى هى معادلة قطع زائد خطاه
المقربان موازيان لمحورى الاحداث

بند ١١٢ معادلة القطع الزائد الموضوعة بالصورة س ص = ث
اعنى كمية ثابتة توصل الى خواص شهيرة لهذا المنحنى هى
اولا ليكن ر ع و ر ع رمزين لقاطعين متوازيين (شكل ٦٣)
فاذا رمز الى القطعتين
ر م و م ع بالرمزين
ل و ق والى القطعتين
ر م و م ع بالرمزين
ل و ق والى الاحداثيين
م ك و م ح بالرمزين
س و ص والى الاحداثيين
م ك و م ح بالرمزين
س و ص فانه يؤخذ من المعادلة المذكورة س ص = س ص

شكل ٦٣

ومن تشابه المثلثات مَ نَ رَ و مً نً رً و مَ عَ عَ و مً عً عً
هذان الارتباطان وهما

$$\frac{\text{سَ}}{\text{سً}} = \frac{\text{لَ}}{\text{لً}} \quad \text{و} \quad \frac{\text{صَ}}{\text{صً}} = \frac{\text{فَ}}{\text{فً}}$$

ومن هنا يؤخذ لَ فَ = لً فً
واذن يكون ل ف الذى هو حاصل ضرب قطعتى قاطع واحد
كمية ثابتة
وثانيا لتكن نقطتان من المنحنى كالنقطتين مَ و دَ موضوعتين
على قاطع واحد كالقاطع رَعَ فيحدث بموجب ما تقدم
رَمَ (مَ دَ + دَعَ) = (رَمَ + مَ دَ) دَعَ واذن يكون رَمَ = دَعَ
وحيث ان هذه الخاصية حاصلة على اى وجه كان اتجاه الخط
القاطع فيؤخذ منها طريقة بسيطة لرسم قطع زائد متى علم خطا
المقربان ونقطة منه
ملحوظة تتعلق بالمنحنى (شكل ٤٤) الذى معادلته هى

$$\text{ص} = \frac{\text{م}^{٢}}{\text{س}}$$

شكل ٤٤

بند ١١١٣ اذا جعل فى هذه
المعادلة ص = هـ حذ^س ص = هـ
واذا جعل فيها س = م هـ حذ^س
ص = $\frac{\text{هـ}}{\text{م}^{٢}}$ واذا جعل فيها
ص = م هـ حذ^س س = $\frac{\text{هـ}}{\text{م}^{٢}}$
ومن هنا يشاهد ان المنحنى يكون اكبر ميلا الى محور س
من محور ص وان كان هذان المحوران خطين مقربين للمنحنى

في بعض منحنيات عالية

بند ١١٤ المنحنى اللوغاريتمي معادلته هي $\frac{ص}{ﻫ} = لو \frac{س}{ﻫ}$ التي فيها الطول ﻫ مقياس الرسم ومحور ص خط مقربي (شكل ٦٥)

فاذا جعل فيها $\frac{س}{ﻫ} = \infty$ ..... ١٠٠٠ ١٠٠ ١٠ ١ ٠،١ ٠،٠١ ٠،٠٠١ ... ٠

فانه يحدث $\frac{ص}{ﻫ} = \infty$ ..... ٣ ٢ ١ ٠ -١ -٢ -٣ ..... $-\infty$

شكل ٦٥

والمعادلة $\frac{ص}{ب} = لو \frac{س}{ب}$ هي معادلة منحن مشابه للمنحنى المتقدم ومتشابه الوضع معه بالنسبة للمحورين لانه اذا جعل $\frac{س}{ب} = \frac{س}{ﻫ}$ أو $س = \frac{ب}{ﻫ} س$ حدث $\frac{ص}{ب} = \frac{ص}{ﻫ}$ أو $ص = \frac{ب}{ﻫ} ص$

بند ١١٥ والمعادلة $\frac{ص}{ﻫ} = م \, لو \frac{س}{ﻫ}$ هي ايضا معادلة منحن مشابه للمتقدم غير انه ليس مشابها له في الوضع بالنسبة لمحور س لانه يؤخذ من هذه المعادلة $\frac{ص}{مﻫ} = لو \left(\frac{س}{مﻫ} \times م\right)$

ومن هنا ينتج $\frac{ص - ﻫ \times م \, لو م}{م ﻫ} = لو \frac{س}{م ﻫ}$

وحينئذ اذا رفعت نقطة الاصل بالطول ﻫ × م لو م على محور ص ورمز الى الاحداثيين الجديدين بالرمزين ص، س حدث $\frac{ص}{مﻫ} = لو \frac{س}{مﻫ}$ واذن يثبت المطلوب

بند ١١٦ المنحنى الذي معادلته هي $\frac{ص}{ﻫ} = \frac{ﻫ^{\frac{س}{ﻫ}}}{١}$ هو ايضا



منحنى لوغارتمى غير أن خط المقرلى هو محور الابعاد السالبة س لانه يحدث (شكل ٦٦)

$$\text{لو}\ \frac{\text{ص}}{\text{م}} = \frac{\text{س}}{\text{م}} \times \text{لوم}$$

ومن هنا يؤخذ $\frac{\text{س}}{\text{م}} = \frac{1}{\text{لوم}}\ \text{لو}\ \frac{\text{ص}}{\text{م}}$

فى المنحنى الجيبى

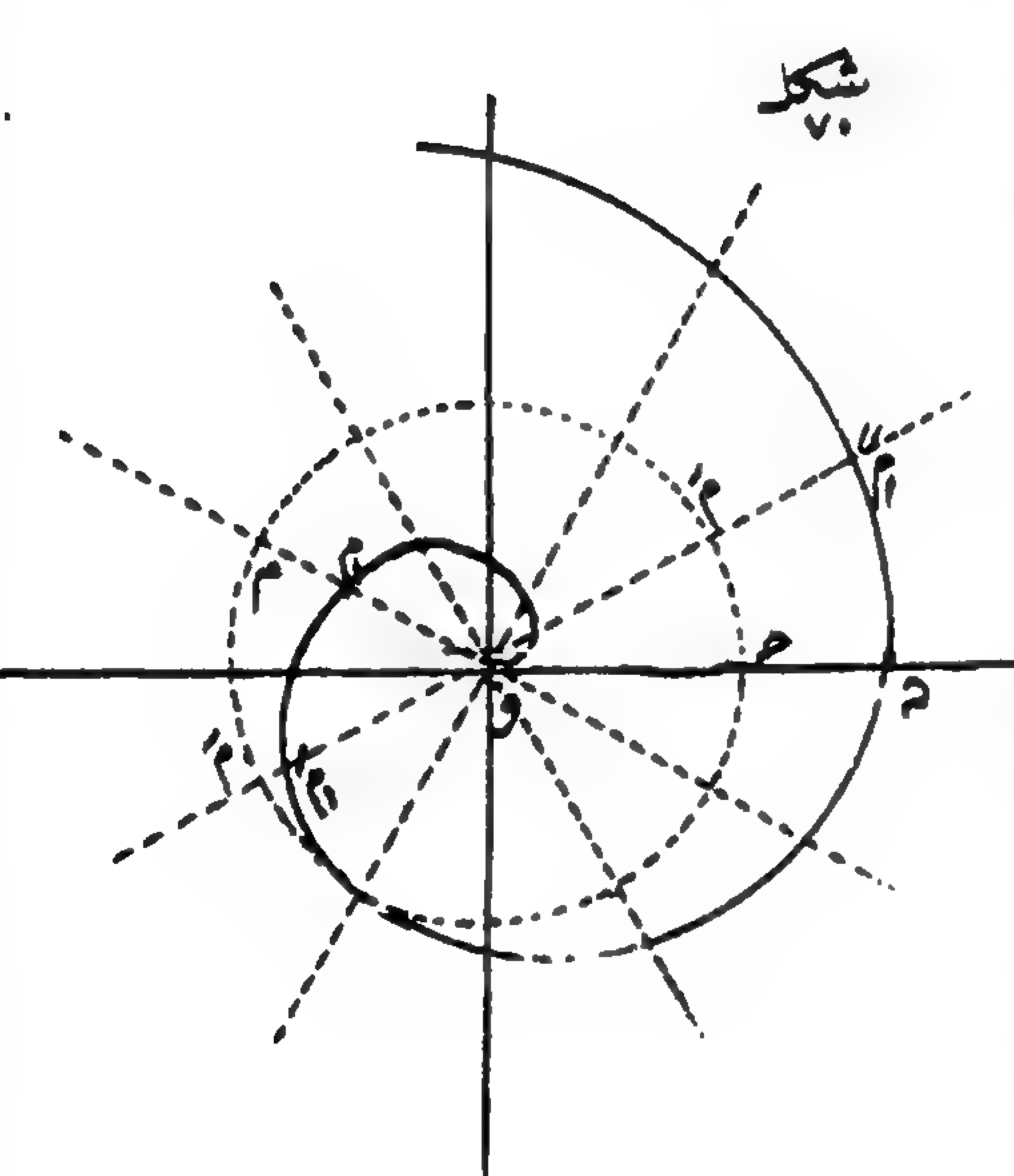
بند ١١٧ اذا اخذت على المحور وس (شكل ٦٦) الاحداثيات الافقية و ح و ح ً و ح ً ً مساوية للقسى ام و ام ً و ام ً ً (شكل ٦٧) وجعلت الاحداثيات الراسية ح م و ح ً م ً و ح ً ً م ً ً الخ متحدة فى الطول والجهة مع الاحداثيات الراسية ح م و ح ً م ً و ح ً ً م ً ً الخ المنسوبة للدائرة فتكون معادلة المنحنى وم م ً م ً ً الخ الحادثة من ذلك هى ص = نو حا($\frac{\text{س}}{\text{نو}}$) وذلك بجعل نو رمز النصف قطر الدائرة الراسمة وفى هذه الحالة تكون الزاوية $\frac{\text{س}}{\text{نو}}$ كناية عن النسبة الواقعة بين القوس المحصور بين ضلعيها ونصف القطر المرسوم به والصورة العمومية لهذا المنحنى سهلة المناقشة

بند ١١٨ اذا تدحرجت دائرة بدون انزلاق على خط مستقيم فى مستو واحد فان المنحنى الذى ترسمه نقطة من محيط هذه الدائرة يسمى سكلوُويد

شكل ٦٩ وليكن ا م ب (شكل ٦٩) هو الدائرة الراسمة فى وضعها الابتدائى وى ل م١ ك هو هذه الدائرة فى وضع آخر حيثما اتفق وليفرض ان النقطة الراسمة تكون موجودة فى النقطة ا بالنسبة للوضع الابتدائى وفى النقطة م١ بالنسبة للوضع الآخر فيؤخذ من التعريف أن قوس ل م١ = ا ل وحيث ان ا م = ل م١ فيكون م ا = ا ل واذن يكون م م١ = قوس م ا وكذلك مَ مَ١ = قوس مَ ا ونحو وعلى العموم يكون ص = س اذ جعل س رمزا للاحداثى الافقى للمنحنى وهو أى الاحداثى ا م المأخوذ بالابتداء من النقطة ا على المحيط ا م ب وى ص رمزا للاحداثى الرأسى م م١ الموازى للمحور ا هـ فاذا كانت معادلة المتغيرين هى ص = د س فيكون المنحنى السكلويدى منحنيا مطولاً أو منضما بحسب ما تكون الكمية د الثابتة > ا أو < ا

في حلزون ارشميدس

بند ١١٩ اذا دار مستقيم كالمستقيم و م في مستوحول نقطة من نقطة كالنقطة و مثلا وتحركت النقطة م على المستقيم المذكور وقطعت عليه اطوالا متناسبة عندما يرسم هذا المستقيم في سيره زوايا متناسبة فان النقطة م ترسم على المستوى المنحني المعروف بحلزون ارشميدس وليكن وهـ (شكل ٧٠) كناية عن الوضع الذي يشغله المستقيم المذكور عندما تكون النقطة الراسمة موجودة في النقطة و وهـ م مَ كناية عن دائرة مركزها و فيكون الطولان و م و مَ المنسوبان لنصف القطر القطبي مناسبين للزاويتين هـ و م و هـ و مَ أو للقوسين هـ م و هـ مَ ومن هنا تؤخذ كيفية رسم المنحني بالسهولة متى علم الطول و م الذي تقطعه النقطة الراسمة



فى مدة دورة كاملة للمستقيم المتحرك

بند ١٢٠ ولتحصيل معادلة الحلزون يجعل وم = م وهى كمية معلومة يتخصص بها هذا المنحنى ثم يجعل وم = ل رمزا لنصف القطر القطبى ويجعل $\frac{\text{قوس هـم}}{\text{وم}}$ = هـ رمزا للنسبة الواقعة بين القوس المتغير هـم ونصف قطره وهذه النسبة هى كناية عن مقدار الزاوية هـوم فيتحصل من تعريف المنحنى هذه المتناسبة وهى

ل : م :: هـ : ٢ط أو ٢ط ل = م هـ

والمتغيران ل و هـ هما الاحداثيان القطبيان للمنحنى

فى تغيير الاحداثيات المنسوبة للمنحنيات ذات الدرجة الثانية

بند ١٢١ معادلات المنحنيات المتقدمة قد تحصلت بصور بسيطة بحسب الوضع المنتخب لمحورى الاحداث وقد تقدم فى (بند ٦٨) و (بند ٦٩) ان معادلة الدائرة تكون مركبة او بسيطة بحسب كون نقطة اصل الاحداثيات مارة بالمركز او غير مارة به ومن البديهى ايضا ان معادلات القطع الناقص والزائد والمكافى تكون مركبة عند ما تكون نقطة الاصل وزاوية المحورين مأخوذتين حيثما اتفق ومما ينبغى تحقيقه هو أولا أن معادلات المنحنيات الثلاثة المذكورة المبنية بالاحداثيات الموازية للمحورين تكون معادلات بدرجة ثانية على أى وجه كان وضع المحورين أعنى أنها تكون محصورة

دائما فى هذا القانون العمومى وهو

ا سً + ب س ص + ٮ سً + ٯ ص + ه س + ف = .

وثانيا ان كل معادلة بدرجة ثانية يكون فيها المتغيرات س و ص كناية عن احداثيين موازيين لمحورين لا تدل الا على قطع ناقص (والدائرة تعد حالة خصوصية منه) او قطع زائد او قطع مكافٍ

واثبات هاتين القضيتين يؤخذ من الطريقة العمومية المعروفة بتغيير الاحداثيات

بند ١٢٢ ليكن وس و وص (شكل ٧١) محورين معلومين ومأخوذين حيثما اتفق

شكل ٧١

يُنسب اليهما منحن معادلته

ٯ (س ,ص) = .

وليكن وَسَ و وَصَ محورين آخرين معلومين يطلب تحصيل معادلة المنحنى المذكور بالنسبة لهما

ونكن و و ى رمزين للاحداثيين وا و وَا لنقطة الاصل وَ بالنسبة للمحورين الاولين فبفرض م نقطة حيثما اتفق من نقط المنحنى المذكور يكون احداثياها س و ص هما وع و ع م بالنسبة للمحورين الأولين وأما احداثياها سَ و صَ فانهما يكونان وَعَ و عَ مَ بالنسبة للمحورين

الآخرين اذا تقرر هذا سهل ايجاد معادلات الارتباطات
الواقعة بين الكميات المتغيرة وهى س وه ص وه سَ وه صَ
والكميتين الثابتتين وهما وه ے والزوايا الواقعة
بين المحاور ولذا يكفى الالتفات الى أن الخط المنكسر وعم
المركب من س وه ص والخط المنكسر واوَعَ م المركب من
وه ے وه سَ وه صَ كناية عن طريقين كثيرى الاضلاع
موصلين من النقطة و الى النقطة م وبناء على ذلك يكون
مسقطاهما على مستقيم واحد متساويين كما سبق فى (٥٥د)
وحيث انه لا يقتضى هنا غير اعتبار المساقط القائمة نستعمل
فى ذلك الدعوى النظرية المتقدمة فى (٥٥د)
وحينئذ اذا توهمنا من النقطة و رسم محور حيثما اتفق
كالمحور وف تحصل على العموم بمقتضى التعاريف السابقة
القانون س حتا (س وق) + ص حتا (ص وق) = وحتا (س وق)
+ ے حتا (ص وق) + سَ جتا (سَ وق) + صَ جتا (صَ وق) الذى هو
بمقتضى الملحوظات المتقدمة (فى ٥٧د) أعم القوانين
ومن البديهى انه اذا انتخب وضعان مختلفان للمحور وف
تحصل معادلتان بدرجة أولى يؤخذ منهما للاحداثيين
س وه ص مقداران بدرجة أولى بالنسبة الى سَ وصَ
وهذه النتيجة تحصل مباشرة بجعل أحد الوضعين المذكورين
وس عمودا على وص والثانى وص عمودا على وس
وفى هاتين الحالتين يؤل القانون المتقدم (بالتنبيه على أن

جيوب التمام المنسوبة للزوايا الحادثة من مستقيم مع المحور
و س والمحور و ص تكون جيوبا للزوايا الحادثة من المستقيم
المذكور مع المحور و ص والمحور و س) الى هذه الصورة وهي

س حا (س و ص) = و حا (س و ص) + سَ حا (سَ و ص) + صَ حا (صَ و ص)

و ص حا (ص و س) = ى حا (ص و س) + سَ حا (سَ و س) + صَ حا (صَ و س)

ومن هنا يؤخذ $\left\{ \begin{array}{l} س = و + \dfrac{سَ حا (سَ و ص) + صَ حا (صَ و ص)}{حا (س و ص)} \\ و \quad ص = ى + \dfrac{سَ حا (سَ و س) + صَ حا (صَ و س)}{حا (ص و س)} \end{array} \right.$

بند ١٢٣ حيث ان الاحداثيات س و ص و سَ صَ المنسوبة
لنقطة واحدة من المنحنى المفروض تحقق بها المعادلة
ى (س و ص) = ٠ هي والقانونان الاخيران من البند السابق
فاذا استعوض المتغيران س و ص بمقداريهما المتحصلين
وهما القانونان المذكوران حدث من ذلك معادلة جديدة
تكون محققة ايضا وحيث ان هذه المعادلة لا تحتوي إلا على
المتغيرين سَ و صَ فتكون هي معادلة المنحنى المذكور منسوبا
الى المحورين وَسَ و وَصَ

بند ١٢٤ فاذا كانت المعادلة ى (س و ص) معادلة جبرية
بدرجة م بمعنى انه يمكن تحويلها الى الصورة

اصَم + (ب س + ﺣ) صَم-١ + (ى سَ٢ + ه س + ف) صَم-٢ + ... = ٠

بأن كان اعظم مجموع لاسس المتغيرين س و ص في حد
واحد من هذه المعادلة هو العدد الصحيح م فمن البديهي ان

المعادلة الناتجة اى المحولة بالنسبة للاحداثيين الجديدين
سَ و صَ لا تزيد درجتها عن م لكون مقدارى المتغيرين
س و ص الموضوعين فى المعادلة المذكورة هما كميات
بدرجة اولى للمتغيرين سَ و صَ ولا تكون درجة المعادلة
الناتجة دون درجة م لأنه لو أمكن ذلك لارتفعت الدرجة
عند الرجوع من المحاور الجديدة الى القديمة وذلك محال
وعلى ذلك تكون دائما معادلات القطع الناقص والمكافئ
والزائد معادلات بدرجة ثانية على اى وجه كانت محاور
الاحداث التى تنسب اليها هذه المنحنيات

بند ١٢٥ وللبرهنة على عكس هذه القضية تؤخذ اعم
معادلة بدرجة ثانية ذات متغيرين كالمعادلة

اصَ + ب س ص + ح سَ + ء ص + هـ س + ف = ... (١)

ويفرض فى هذه المعادلة ان الاحداثيين س و ص قائمان
لانهما ان لم يكونا كذلك لامكن بواسطة تحويل المحاور أن يجعل
للمنحنى المذكور بالنسبة لمحورين قائمين معادلة مغايرة
لتلك المعادلة غير أنها تكون دائما بدرجة ثانية
ومما ينبغى التنبيه عليه ايضا انه اذا كان الحد الثانى ب س ص
معدوما من المعادلة آلت بالسهولة بواسطة تحويل كالمتقدم
(فى بند ٧١) الى ثلاثة حدود ولذا يبدأ بحذف الحد ب س ص
المذكور بواسطة تحويل اتجاه محورى الاحداث مع بقائهما
قائمين وعدم تغيير وضع نقطة الاصل بأن يستعمل فى ذلك

القانونان الاخيران (من بند ١٢ د) بعد اختصارهما فيحدث
و=. و ى =. و حا(س ص) = او حا (سَ صَ) = جتا (سَ بَ) و حا (صَ ص)
= -حا (سَ بَ) و حا(ص وس) . او حا (صَ وصَ) = حا (سَ وس)
ولمزيد الاختصار اذا وضع د بدل الزاوية (سَ بَ) فان
القانونين المذكورين يؤلان الى

س = سَ حتا د - صَ حا د و ص = سَ حا د + صَ حتا د

(وهذان القانونان لا يختلفان عن القانونين المتحصلين
بواسطة نظرية المساقط)

فاذا وضع مقدار المتغيرين س و ص هذان في المعادلة (١)
تحصلت معادلة بدرجة ثانية صورتها هى

أَصَ٢ + بَ سَ صَ + حَ سَ٢ + ءَ صَ + هَ سَ + ف = . - - - - (٢)

وهي معادلة تحتوى فيها المكررات أَ و بَ و حَ على الزاوية د
وينبغي انتخاب هذه الزاوية على وجه بحيث ينعدم بَ
ولتحصيل مقدار بَ هذا تجمع الحدود المحتوية على سَ صَ
فيتحصل بَ = ٢ (ا - ح) حا د حتا د + ب (جتا٢ د - حا٢ د)
أو انه يحدث (بمقتضى بند ١٩ من حساب المثلثات

بَ = (ا - ح) حا ٢ د + ب جتا ٢ د

وهذه الكمية معدومة بقطع النظر عن د ان كان فيها
ا = ح و ب = . وفي هذه الحالة يشاهد بالسهولة (بند ٢١)
أن المعادلة (١) تكون معادلة دائرة بالنسبة للاحداثيات
القائمة ولابد فيما عدا هذه الحالة لاجل انعدام حاصل الضرب

سَ صَ من تحقيق المعادلة

$(١-ﻫ)$ جا٢ م + ب جتا٢ م = ٠

ومن هنا نتحصل بالقسمة على جتا٢ م

$(١-ﻫ)$ ظا٢ م + ب = ٠ أو ظا٢ م = $\frac{ب}{١-ﻫ}$

وحيث ان ظل الزاوية التى تأخذ فى الازديا د من ٠° الى ١٨٠°
يكون له سائر المقادير التى بين + ∞ و − ∞ يعلم من ذلك
انه يوجد دائما مقدار واحد للزاوية م يكون اقل من ٩٠°
به يتحقق الشرط المطلوب وهو جعل (بَ = ٠) وحينئذ يوجد
دائما وضع واحد لمحورين قائمين (الا فى الدائرة) تؤل به
معادلة منحنى بدرجة ثانية الى هذه الصورة وهى

$$آ صَ^٢ + ﻫ سَ^٢ + ءَ صَ + ﻫ سَ + ف = ٠$$

بند ١٢٦ حيث انه لم يبق علينا غير تكميل تحويل هذه المعادلة
على وجه بحيث تؤل الى ثلاثة حدود فنقول
ان هذه المعادلة على حالتين احداهما أن آ و ﻫ بَ يكونان
غير معدومين والثانية ان أحدهما يكون معدوما فقط
لانه لا يمكن انعدامهما معا لكونه يجب أن المعادلة لا تزال بدرجة
ثانية ففى الحالة الاولى يمكن وضع المعادلة هكذا

$$آ(صَ + \frac{ءَ}{٢آ})^٢ + ﻫ(سَ + \frac{ﻫَ}{٢ﻫ})^٢ + ف - \frac{ءَ^٢}{٤آ} - \frac{ﻫَ^٢}{٤ﻫ} = ٠$$

اذا تقرر هذا امكن دائما نقل المحورين بالتوازى لاتجاهيهما
الى الوضعين وَسَ و وَصَ بحيث اذا جعل سً و صً رمزين

لاحداثيى نقطة من المنحنى فى هذين المحورين القائمين
الجديدين حدث

$$\text{سَ} + \frac{\text{هـَ}}{\text{٢حـَ}} = \text{سً} \quad \text{و} \quad \text{صَ} + \frac{\text{ءَ}}{\text{٢أَ}} = \text{صً}$$

لانه يكفى ويلزم لذلك ان يكون احداثيا نقطة الاصل الجديدة بالنسبة للمحورين وسَ و وصَ هما $-\frac{\text{هـَ}}{\text{٢حـَ}}$ للاحداثى الافقى و $-\frac{\text{ءَ}}{\text{٢أَ}}$ للاحداثى الراسى فاذا جعل للاختصار
$\text{ف} - \frac{\text{ءَ}^{٢}}{\text{٤أَ}} - \frac{\text{هـَ}^{٢}}{\text{٤حـَ}} = \text{فَ}$ فلا شك ان معادلة المنحنى تؤل الى هذه الصورة وهى

$$\text{أصً}^{٢} + \text{حـ سً}^{٢} + \text{فَ} = ٠$$

ولنبحث الآن جميع الفروض الممكنة على مقادير الكميات الثابتة أَ و حـَ و فَ فنقول

أولا اذا كانت هذه الكميات الثلاثة متحدة فى الاشارة كانت المعادلة مستحيلة

وثانيا اذا كان فَ معدوما رأ متحدا فى الاشارة مع حـَ فان المعادلة لا تكون محققة الا اذا كان سً = ٠ و صً = ٠ وفى هذه الحالة لا تكون دالة الا على نقطة واحدة هى النقطة التى صارت نقطة اصل للاحداثيات بواسطة التحويل الأخير

وثالثا اذا كان فَ معدوما و أَ و حـَ مختلفين فى الاشارة فان المعادلة تؤل الى الصورة

$$\text{ص}^{٢} = \text{ك}^{٢}\text{س}^{٢} \quad \text{أو الى} \quad \text{ص} = \pm\,\text{ك س}$$

وفى هذه الحالة لا تكون دالة الا على مستقيمين مارين

بنقطة الاصل ومتماثلين في الوضع بالنسبة للمحورين الأخيرين
ورابعًا اذا كان آ و حَ لهما اشارة واحدة مخالفة لاشارة
فَ فان المعادلة تؤل الى الصورة $\frac{ص^٢}{ح^٢} + \frac{س^٢}{م^٢} = ١$
وهذه هى معادلة قطع ناقص منسوب الى قطريه الاصليين
(بند ١٨٣)
وخامسًا اذا كان آ و حَ مختلفين في الاشارة فمهما كانت
اشارة فَ فان المعادلة تؤل الى احدى هاتين الصورتين
وهما $\frac{ص^٢}{ح^٢} - \frac{س^٢}{م^٢} = \pm ١$ وهى معادلة قطع زائد منسوب الى
قطريه الاصليين (بند ١٨٣)
بند ١٢٧ وفي الحالة الثانية اى الحالة التى يكون فيها
بالمعادلة الاخيرة من (بند ١٢٤) احد المكررين آ أو حَ معدومًا
بأن فرض أن جَ هو المعدوم مثلا وكان ايضا هَ معدومًا
فان المعادلة المذكورة تؤل الى $آص^٢ + ءص + ف = ٠$
وهذه هى معادلة مستقيمين موازيين لمحور سَ وفيما عدا
هذا الفرض توضع المعادلة هكذا

$$آ(ص + \frac{ء}{٢آ})^٢ + هَ(س + \frac{ف}{هَ} - \frac{ء^٢}{٤آهَ}) = ٠$$

فاذا نقل المحوران بالتوازى لاتجاهيهما بحيث تحصل
$$ص + \frac{ء}{٢آ} = صَ \quad و \quad س + \frac{ف}{هَ} + \frac{ء^٢}{٤آهَ} = سَ$$
آلت المعادلة الى الصورة $آصَ^٢ + هَسَ = ٠$ وهى معادلة
قطع مكافئ
بند ١٢٨ وحينئذ فقد ثبتت القضية المتقدمة (في بند ١٢١)

التى

التى يؤخذ منها أن المنحنيات الثلاثة يطلق عليها اسم المنحنيات ذات الدرجة الثانية

فى اقطار المنحنيات ذات الدرجة الثانية

بند ١٢٩ اذا اعتبر فى مستو قطع ناقص أو زائد مستقيم حيثما اتفق يكون قاطعا للمنحنى فى نقطتين ورسم من المركز مستقيم موازٍ لهذا المستقيم وجعل محورا للابعاد الاحداثية ص وجعل محور س مارا بالمركز المذكور غير أنه مأخوذ حيثما اتفق فان معادلة المنحنى توضع هكذا $ص^{2} + م س^{2} + ن س ص + ع = ٠$ لانه يلزم أن هذه المعادلة لا تزال محققة عند تغيير اشارتى مقدارى كل من المتغيرين س و ص معا ويوخذ من هذه المعادلة أن

$$ص = -\frac{ن}{٢} س \pm \sqrt{\left(\frac{ن^{2}}{٤} - م\right) س^{2} - ع}$$

ومن هنا يستنبط بالسهولة ان المستقيم الذى معادلته هى $ص = -\frac{ن}{٢} س$ يمر بمنتصف سائر الاوتار الموازية لمحور ص وهذا المستقيم هو المعروف بالقطر

فاذا بقى محور ص على حاله وجعل القطر المتحصل محورا للأبعاد الاحداثية س فان المعادلة تؤل بالنسبة الى هذه الاحداثيات المائلة (على وجه العموم) الى الصورة $ص^{2} + م_{١} س^{2} + ن_{١} = ٠$ وهى عين صورة معادلة المنحنى عند ما يكون منسوبا الى قطريه الاصليين

وفى هذه الصورة الاخيرة يشاهد أن كل محور يمر بمنتصف الاوتار الموازية للمحور الآخر ولذا يطلق على هذين المحورين

فى هذه الحالة اسم القطرين المزدوجين

بند ٣ اذا كان المنحنى قطعا مكافئا معادلته بالنسبة لمحورين قائمين هى $\text{ص}^2 = 2\,\text{م}\,\text{س} + \text{د}$

وفرض خط مستقيم حيثما اتفق معادلته هى $\text{ص} = \text{ح}\,\text{س} + \text{ب}$ وبحث عن الاحداثيات الرأسية لنقط التقاطع فبواسطة حذف المتغير س يحدث $\text{ص}^2 - \frac{2\text{م}}{\text{ح}}\,\text{ص} + \frac{2\text{م}\,\text{ب}}{\text{ح}} = \text{د}$

ومن هنا يؤخذ $\text{ص}' = \frac{\text{م}}{\text{ح}} + \sqrt{\ }$

و $\text{ص}'' = \frac{\text{م}}{\text{ح}} - \sqrt{\ }$

ويكون الاحداثى الرأسى لمنتصف الوتر هو $\frac{1}{2}(\text{ص}' + \text{ص}'')$ أو $\frac{\text{م}}{\text{ح}}$ وحينئذ فليس لهذا الاحداثى الراسى ارتباط بالكمية الثابتة ب

ومن هنا يعلم أن نقط تنصيف سائر الاوتار الموازية له تكون موجودة على خط مواز للقطر الاصلى للمنحنى المذكور أو أن سائر اقطار القطع المكافئ تكون كلها متوازية

فاذا جعل محور ص موازيا للوتر وجعل محور س تابعا للقطر المقابل له فان معادلة القطع المكافئ المذكور لا تؤل الى صورة أبسط من هذه الصورة وهى $\text{ص}^2 = 2\,\text{م}_1\,\text{س} + \text{د}_1$ لان محور س لا يقطع المنحنى الا فى نقطة واحدة وحينئذ يمكن وضع هذه المعادلة هكذا

$$\text{ص}^2 = 2\,\text{م}_1\left(\text{س} + \frac{\text{د}_1}{2\,\text{م}_1}\right)$$

اوانه يمكن وضعها بواسطة نقل محور ص بالتوازى لاتجاهه الاصلى هكذا $ص^{٢} = ٢ م_{١} س$

وحينئذ يرى من هنا أن صورة المعادلة هذه هى الصورة المتقدمة فى (س١٩د) الا ان المحورين فى هذه الحالة غير قائمين

انتهى الجزء الأول من تطبيق الجبر على الهندسة

